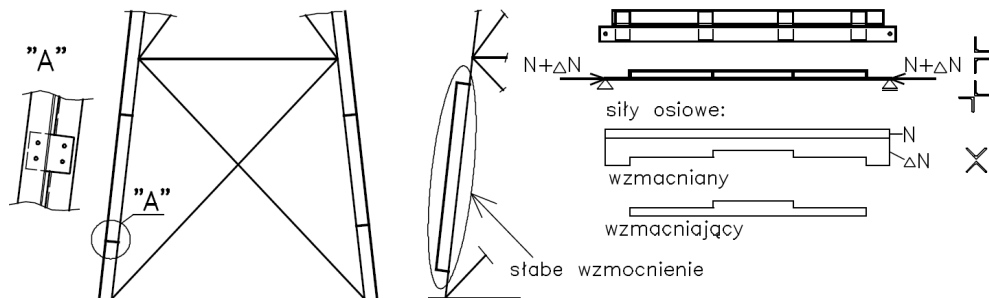


Grzegorz Gremza<sup>1</sup>

## ANALIZA EFEKTYWNOŚCI WZMOCNIENIA ŚCISKANEGO PRĘTA Z KĄTOWNIKA DRUGIM KĄTOWNIKIEM

### Wprowadzenie

W praktyce inżynierskiej niejednokrotnie zachodzi potrzeba zwiększenia nośności prętów kratownic skonstruowanych z pojedynczych kształtowników, na przykład krawężników przestrzennych trzonów kratowych wież i masztów telekomunikacyjnych z kątowników równoramiennych. Jedną z chętnie wykorzystywanych w takich konstrukcjach możliwości wzmocnienia jest zamontowanie równoległego pręta, mającego za zadanie przejęcie części sił wewnętrznych oraz poprawienie stateczności pręta wzmocnianego. Dość powszechnie stosuje się dogodne w montażu rozwiązania (rys. 1), których istotnymi cechami z punktu widzenia statyki może być jednak brak jednoczesnego przekazywania siły na kątownik wzmocniany i wzmocniający w węzle kratownicy czy też pojawianie się dodatkowych albo zmiany istniejących mimośrodków. Zwykle też stosuje się możliwie ograniczoną liczbę wzajemnych połączeń prętów w postaci przewiązek, nakładek lub przekładek. Wszystko to powoduje niepełną efektywność takich wzmocnień w porównaniu do ilości zużytego materiału. W literaturze nie poświęcono też szczególnie wiele miejsca kwestii wstępnego obciążenia pręta w chwili wzmocnienia oraz podatności połączeń pręta wzmocniającego z elementami wzmocnianymi.



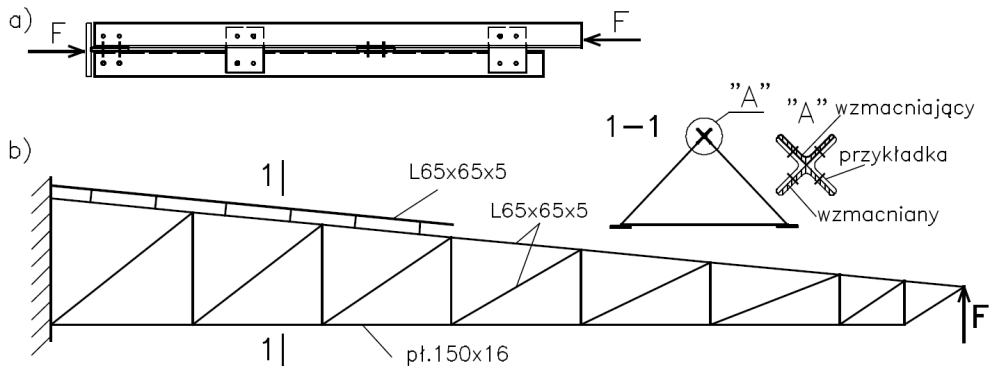
Rys. 1. Przykłady stosowanych wzmocnień

<sup>1</sup> Politechnika Śląska, Wydział Budownictwa, ul. Akademicka 5, 44-100 Gliwice, e-mail: ggre@interia.pl

Pręta wzmocnionego często nie można potraktować w obliczeniach w identyczny sposób jak pręta od początku projektowanego jako złożony (patrz dyskusja przedstawiona w [1]). Celem rozpoczętej pracy, której początkowe elementy przedstawiono w niniejszym artykule, będzie uzyskanie prostej i możliwie dokładnej metody szacowania nośności pręta wzmocnionego bez użycia zaawansowanego oprogramowania.

## 1. Przykłady badań efektywności wzmocnienia

W ogólnodostępnej literaturze znaleźć można niezbyt liczne opisy badań bezpośrednio nawiązujących do omawianego w niniejszym artykule problemu. Jako pierwszy z przykładów można wymienić badania zestawów dwóch kątowników składanych ze sobą w układzie krzyżowym bez wstępnego obciążenia (rys. 2a). Na jednym z końców zestawu siłę przykładano tylko do jednej z gałęzi. Przebadano trzy zestawy o trzech różnych rozwiązaniach przewiązek, a wyniki badań uzupełniono o analizę w zaawansowanym programie MES [2]. Uzyskiwane wyniki wskazują na wzrost nośności o około 30% przy zastosowaniu najmocniejszych połączeń w postaci przewiązek z dwóch kątowników, a wyrównanie sił nastąpiło dopiero w trzecim odcinku między przewiązkami na krótko przed osiągnięciem stanu granicznego.



Rys. 2. Przykłady badanych elementów wg [2] i [3] (rysunek własny, opis w tekście)

Jako drugi przykład można podać przedstawione w [3] dość ciekawe badania modelu przestrzennej wspornikowej kratownicy (rys. 2b) ze wzmacnianym pasem ściskanym (po każdym badaniu pas był wymieniany na nowy). Wzmacniano trzy lub sześć przedziałów, a połączenie gałęzi wzmacniającej ze wzmacnianą wykonywano w postaci dwóch nakładek z kątowników przykręconych do obu gałęzi za pomocą wstępnie sprężonych śrub. Efektywność wzmocnienia ( $R_R$ ) oceniano na podstawie odczytów z tensometrów naklejonych na gałęziach, korzystając z zależności:

$$R_R = N_R / (N_T + N_R) \quad (1)$$

w której  $N_T$  i  $N_R$  - przybliżone wartości sił w prętach, obliczone następująco:

$$N_T = \min\{EA_T(\varepsilon_A + \varepsilon_D)/2; EA_T f_y\} \quad (2a)$$

$$N_R = \min\{(EA_R(\varepsilon_B + \varepsilon_C)/2; EA_R f_y)\} \quad (2b)$$

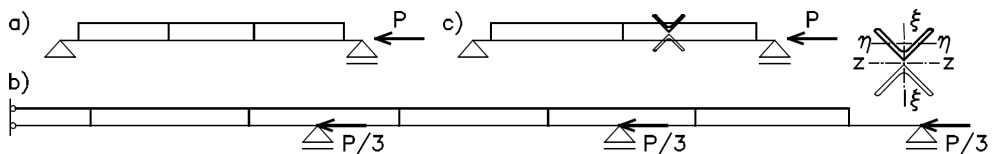
We wzorach (2a) i (2b):  $E$  - moduł Younga,  $A_T$ ,  $A_R$  - pola przekroju pręta wzmacnianego i wzmacniającego,  $f_y$  - granica plastyczności stali,  $\varepsilon_A$ ,  $\varepsilon_B$ ,  $\varepsilon_C$ ,  $\varepsilon_D$  - wartości odkształceń zmierzonych na ramionach kątownika w poziomie osi głównych  $\eta$ - $\eta$ .

Ustalono, że „efektywność”  $R_R$  w chwili uzyskania maksymalnego obciążenia wynosiła  $\sim 0,5$ , jednak nie dotyczyło to ostatniego lub dwóch ostatnich przedziałów wzmocnionych, licząc od podstawy kratownicy. Wartość  $R_R$  równa  $0,5$  nie oznaczała wyrównania odkształceń w sąsiadujących gałęziach. W pracy [3] wywnioskowano, że w pierwszym z przedziałów z podwojonym prętym nie można uznać wzmocnienia za efektywne, a zatem wzmacniać należy krawężnik na odcinku co najmniej o przeszło dłuższym niż to wynika z przekroczenia warunków nośności.

W omawianych badaniach negatywny wpływ wstępnego obciążenia konstrukcji przed wzmocnieniem ( $\sim 30\%$  jej nośności bez wzmocnienia) na globalną nośność konstrukcji wzmocnionej okazał się nie być do końca jednoznaczny (zaistniał przypadek paradoksalny, że jeden z modeli wstępnie obciążonych w chwili wzmocnienia miał nośność większą od nieobciążanego odpowiednika, co powiązano z poślizgiem w stykach w przypadku drugiego z wymienionych). Warto w tym miejscu zwrócić uwagę, że uzyskanie pełnowartościowego połączenia sprężanego odpornego na poślizg w warunkach polowych na stojącej wieży czy wysoko umieszczonym dźwigarze jest raczej trudne.

## 2. Analizowane w artykule przypadki konstrukcyjne

W artykule przeanalizowano przypadki wzmocnień kątownika ściskanego za pomocą drugiego kątownika o identycznym przekroju (rys. 3). Elementem wzmacnianym będzie wstępnie obciążony kątownik L120 x 120 x 12 o smukłości typowej dla krawężnika wieży kratowej (długość 2,5 m), analizowane zaś będzie jego wyboczenie względem osi słabszej (przed wzmocnieniem). Rozpatruje się tylko wyboczenie w osi  $\eta$ - $\eta$  (rys. 3). Zakłada się wstępnie do potrzeb niniejszego artykułu, że nośność wzmocnionego pręta przy wyboczeniu w osi  $\xi$ - $\xi$  (lub  $z$ - $z$ ) będzie nie mniejsza od nośności pręta niewzmocnionego (drugi kierunek wyboczenia będzie szczegółowej rozpatrywany w odrębnych pracach).



Rys. 3. Ogólne schematy statyczne prętów wzmacnianych rozpatrywane w artykule

### 3. Analiza pręta pojedynczego

#### 3.1. Wstępne wygięcie (imperfekcja) a wyboczenie pręta

W obliczeniach prętów osiowo ściskanych zwykle posługujemy się prostą formułą [4]:

$$P: \left( \frac{Af_y}{\chi} \frac{1}{\gamma_{MI}} \right) \leq 1 \quad (3)$$

w której:  $P$  - obciążenie pręta (siła osiowa),  $A$ ,  $f_y$  - pole przekroju pręta i jego granica plastyczności,  $\chi$  - współczynnik wyboczenia określony wg krzywej normowej,  $\gamma_{MI}$  - współczynnik bezpieczeństwa.

Zamiast stosowania formuł ze współczynnikami wyboczeniowymi, takich jak wzór (3), można w sposób bezpośredni wprowadzać do modelu obliczeniowego wstępne wygięcie pręta o strzałce  $e_0$  [4], zastępujące jego imperfekcje materiałowe i geometryczne. Wygięcie to wraz z przemieszczeniem II rzędu (efekt  $P$ - $\delta$ ) generuje występowanie momentu zginającego  $M$ , zaś suma naprężeń od siły osiowej  $N = P$  i momentu w najbardziej wyężonym przekroju decyduje o osiągnięciu nośności przy wyboczeniu tzw. pręta rzeczywistego. W zakresie sprężystej pracy materiału wartość całkowitej strzałki wygięcia  $f_1$  pojedynczego pręta dwuprzegubowego pod obciążeniem osiowym  $P$  wyniesie:

$$f_1 = \frac{e_0}{1 - \frac{P}{P_{I,cr}}} \quad (4)$$

a naprężenie na krawędzi jego najbardziej wyężonego przekroju:

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{M}{W} = \frac{P}{A} \left( 1 + \frac{Af_1}{W} \right) = \frac{P}{A} \left( 1 + \frac{Ae_0}{W} \frac{1}{1 - P/P_{I,cr}} \right) = \frac{P}{A} \left( 1 + m_0 \frac{1}{1 - P/P_{I,cr}} \right) \quad (5)$$

We wzorach (4) i (5):  $P_{I,cr}$  - obciążenie krytyczne pręta (bifurkacyjne),  $W$  - wskaźnik zginania przekroju kątownika względem rozpatrywanej osi,  $A$  - jak we wzorze (3).

Jeżeli obciążenie powodujące uplastycznienie pierwszego skrajnego włókna zdefiniuje się jako nośność sprężystą przekroju ( $P = P_{I,el,Rd}$ ), to nośność taką można obliczyć ze wzoru:

$$P_{I,el,Rd} = \chi_{el} Af_y / \gamma_{MI} \quad (6)$$

w którym:

$$\chi_{el} = \left( 0,5(1 + m_0 + \bar{\lambda}^2) + \sqrt{(0,5(1 + m_0 + \bar{\lambda}^2))^2 - \bar{\lambda}^2} \right)^{-1} \quad (7)$$

gdzie  $\bar{\lambda}$  - smukłość względna pręta.

Wprowadzając do wzoru (7) zależność

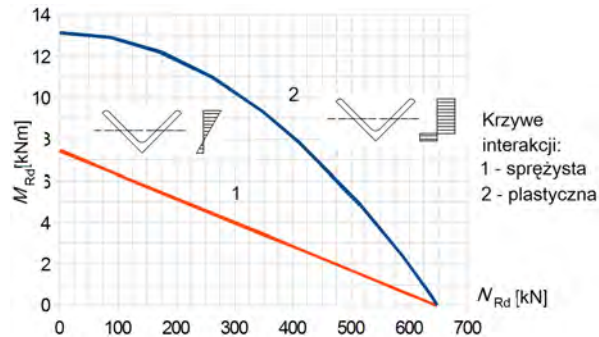
$$m_0 = \alpha(\bar{\lambda} - 0,2) \quad (8)$$

otrzyma się wzór na współczynnik wybozeniowy stosowany we wzorze (3):

$$\chi = \left( 0,5(1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2) + \sqrt{(0,5(1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2))^2 - \bar{\lambda}^2} \right)^{-1} \quad (9)$$

### 3.2. Zagadnienie uplastycznienia

Po osiągnięciu granicy plastyczności w skrajnym włóknie kątownika wzmocnianego, o ile nie dojdzie do wystąpienia lokalnej niestateczności, można rozpatrywać rozkłady naprężeń jak przedstawiono na rysunku 4, na którym porównano także krzywe interakcji dla nośności sprężystej i plastycznej przekroju kątownika.



Rys. 4. Interakcja nośności na zginanie i ściskanie przekroju kątownika L120 x 120 x 12

Mając na uwadze, że ścianki wielu kątowników przy osiowym ścisaniu nie kwalifikują się do klasy 1 lub 2 przekroju, uwzględnianie rezerwy plastycznej wydawać by się mogło uzasadnione dopiero po przeprowadzeniu odpowiednich badań i ewentualnie zaawansowanych analiz numerycznych. Tymczasem z analizy rezultatów obliczeń wynika (patrz pkt 3.3), że rezerwa plastyczna jest w procedurze normowej w znacznym stopniu wykorzystywana.

Wykorzystanie rezerwy plastycznej można by częściowo uzasadnić tym, że wraz ze wzrostem wartości momentu zginającego ulega zmianie rozkład naprężeń w ramieniu kątownika i tym samym podnosi się jego klasa przekroju. Ponadto w obliczeniach stosuje się, zgodnie z [4], strzałkę wygięcia większą niż dopuszczalna wykonawczo według [5], co być może pozwala na ujęcie efektów innych niż tylko niedoskonałości geometrii.

### 3.3. Nośność pręta a sposób obliczania ugięć

W tabeli 1 zestawiono wartości nośności na ściskanie pręta dwuprzegubowego wykonanego z L120 x 120 x 12 obliczonych w sposób standardowy według wzoru (3),

a także wartości nośności sprężystej i nośności z uwzględnieniem rezerwy plastycznej przekroju przy założeniu różnych wstępnych strzałek wygięcia  $e_0$ .

TABELA 1

**Obliczeniowe nośności pręta ściskanego pojedynczego L120 x 120 x 12, S235**

Długość wybocheniowa		L = 150 cm		L = 250 cm		L = 400 cm	
Smukłość względna (L/i)		0,68 (63,8)		1,133 (106,4)		1,812 (170,2)	
Wartość strzałki wstępnego wygięcia		L/500	L/250	L/500	L/250	L/500	L/250
Nośność [kN]	Wzór normowy EC3-1-1	513,8		333,5		161,0	
	Nośność sprężysta (a)* - np. wzór (6)	464,8	377,1	306,4	241,9	154,0	128,7
	Nośność sprężysta (b)* - np. wzór (6)	478,1	393,0	316,7	253,2	157,5	133,4
	Pełne uplastycznienie (por. rys. 4)	–	514,9	–	331,2	–	156,8
	50% nośności plastycznej na zginanie	514,9	–	331,2	–	156,8	–

\* w zależności od kierunku wstępnego wygięcia - w stronę naroża (a) lub w stronę przeciwną (b)

Zgodność nośności na ściskanie w osi  $\eta$ - $\eta$  obliczonej według wzoru (3) z nośnością pręta z imperfekcją ściskanego i zginanego uzyskuje się przy założeniu strzałki wstępnego wygięcia  $e_0 = L/250$  (zgodnej z zaleceniem tablicy 5.1 w EC3-1 i załącznika krajowego) i pełnego uplastycznienia najbardziej wyteżonego przekroju (por. rys. 4), względnie przy założeniu strzałki  $e_0 = L/500$  (maksymalna dopuszczona normą wykonawczą EN 1090-2 [5]) i wykorzystania połowy nośności plastycznej na zginanie zredukowanej ze względu na siłę osiową. Zakładając, że uplastycznienie pierwszego włókna jest równoważne z osiągnięciem nośności (por. wzór (5)), dla wstępnego wygięcia według normy wykonawczej [5] równego  $L/500$ , uzyskana nośność będzie mniejsza o 5÷10% od obliczonej wg wzoru (3), a dla  $L/250$  znacznie przekroczona. W obliczeniach można oczywiście przyjąć strzałkę większą niż wcześniej wymienione, co może być przydatne w analizie konstrukcji o nadmiernych imperfekcjach.

We wszystkich omówionych przypadkach z tabeli 1 końcowe wygięcie służące określeniu momentu zginającego obliczone zostało za pomocą analizy sprężystej II rzędu (por. wzór (4)). Biorąc powyższe pod uwagę, postanowiono, dla zachowania zgodności modelowej z Eurokodem, aby niezależnie od poziomu obciążenia i rozwoju stref plastycznych posługiwać się dla potrzeb niniejszej pracy wartościami wygięcia obliczonymi wyłącznie sprężystość.

**3.4. Sposób przykładania obciążenia a uzyskane wygięcie**

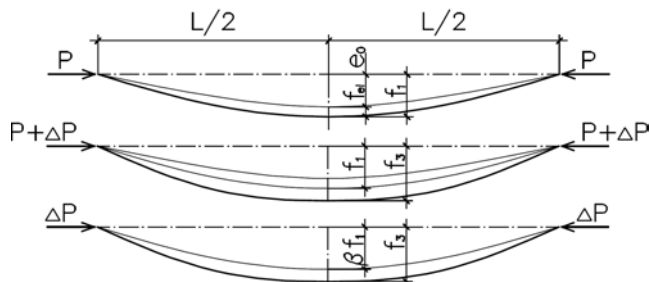
Wpływ sposobu obciążania pręta i przyjmowania strzałek wygięcia na dokładność wyniku w zakresie przemieszczeń i momentów można przedstawić na prostym przykładzie pręta dwuprzegubowego pracującego w zakresie sprężystym (nie rozpatruje się tu na razie samego wzmocnienia). Dla takiego elementu całkowite strzałki  $f$  można określić następująco (rys. 5):

$$f_1 = \frac{e_0}{1 - P/P_{1,cr}}, \quad f_3 = \frac{e_0}{1 - (P + \Delta P)/P_{1,cr}} = \frac{\beta \cdot f_1}{1 - \Delta P/P_{1,cr}} \quad (10)$$

W celu zachowania końcowej strzałki wygięcia o niezmienionej wielkości przy obciążeniach rozdzielonych, jak na rysunku 5, wygięcie pod obciążeniem  $P$  należałoby zwiększyć o współczynnik  $\beta$  (por. wzór (10)):

$$\beta = 1 + \frac{P \cdot \Delta P}{P_{1,cr}^2} : \frac{1}{1 - (P + \Delta P)/P_{1,cr}} \quad (11)$$

Z przedstawionego przykładu wynika wniosek, że w jakimkolwiek modelu stosowanym do oceny nośności pręta z imperfekcją, w tym wzmacnianego, powinno się zwrócić uwagę na możliwość niedoszacowania sił wewnętrznych (momentów zginających).



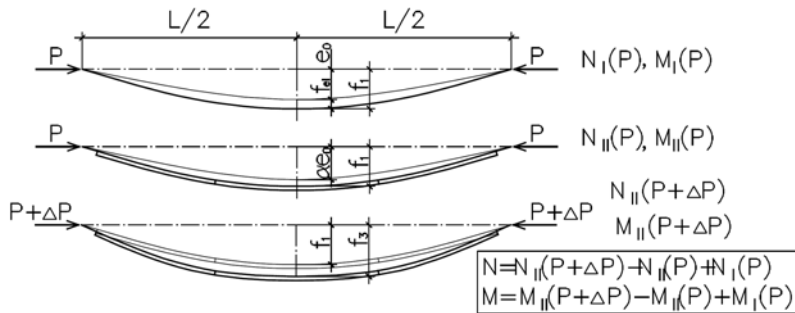
Rys. 5. Wstępne i końcowe wygięcia pręta litego

## 4. Analiza prętów wzmocnionych przez podwojenie

### 4.1. Uwzględnienie stanu zgięciowego w chwili wzmocnienia

W pręcie wzmacniającym przed przyrostem obciążenia o  $\Delta P$  nie powinny pojawić się siły wewnętrzne (z wyjątkiem sił wynikających ze wzajemnego dociągania prętów o różnym kształcie wygięcia lub z naprężeń spawalniczych), podobnie w chwili montażu pręta wzmacniającego nie powinny ulec zmianie dotychczasowe siły wewnętrzne w pręcie wzmacnianym. Należy natomiast uwzględnić (por. pkt 3.4), że wartość wygięcia i sił wewnętrznych w chwili wzmocnienia wpłynie na rozkład sił po przyroście obciążenia i uzyskaną ostatecznie nośność. W celu ujęcia tego wpływu zastosowano zabieg polegający na zachowaniu niezmienionej strzałki wygięcia pręta pierwotnego w schematach przed i po wzmocnieniu (przy jeszcze niezmienionych oddziaływaniach zewnętrznych). Do wartości sił wewnętrznych uzyskanych po wzmocnieniu na tak spreparowanym układzie dodawano wartości sprzed wzmocnienia i dla tego zestawu sił ustalano warunki nośności (rys. 6). Jeżeli w obliczeniach przemieszczeń miałyby zostać uwzględnione nieliniowe zależności naprężenie-odkształcenie stali lub zmianie ulegałyby sztywność połączeń w funkcji działających na nie sił, to sztywność przekrojów i połączeń oraz zmodyfikowane

położenie osi pręta należałoby ustalać także dla tak obliczonego zestawu sił (konieczna iteracja).



Rys. 6. Ilustracja postępowania przy określaniu sił wewnętrznych

Przebieg postępowania zilustrowano na rysunku 6. Kolejność działań jest następująca (kroki a do e):

- a) założenie wstępnego wygięcia  $e_0$  pręta niewzmocnionego (według zaleceń normy lub pomierzonego),
- b) określenie strzałki wygięcia pręta niewzmocnionego  $f_1$  z uwzględnieniem efektów II rzędu ( $P-\delta$ ) w chwili wzmocnienia i obliczenie sił wewnętrznych (przy obciążeniu siłą  $P$ ),
- c) zamodelowanie układu złożonego z pręta wzmocnianego i wzmacniającego o wygięciu równym wygięciu pręta niewzmocnionego obciążonego siłą  $P$  w chwili wzmocnienia (przez fikcyjną modyfikację linii wstępnego wygięcia pręta niewzmocnionego w stanie zerowym - przyjęcie odpowiedniej strzałki  $f_2 = \alpha e_0$ ), gdzie  $\alpha$  można określić np. w sposób iteracyjny,
- d) określenie rozkładu sił wewnętrznych od obciążenia maksymalnego  $P+\Delta P$  i odjęcie wartości od obciążenia  $P$  jak w pkt. c),
- e) zsumowanie sił wewnętrznych uzyskanych jak opisano w pkt. b) i d) oraz sprawdzenie warunku nośności.

W celu wykonania obliczeń, jak przedstawiono powyżej, w popularnym programie komputerowym wykonano modele prętowe, w których uwzględniano odpowiednio wartości wstępnego wygięcia oraz parametry podatności połączenia (opisane dalej w pkt. 4.3). Do obliczenia przemieszczeń i wartości sił wewnętrznych zastosowano statykę nieliniową geometrycznie z liniową sprężystością materiału. Wcześniej sprawdzono, że wyniki wg wzoru (4) i według programu dla pręta pojedynczego ze wstępnym wygięciem są niemal zgodne. Dla uzyskanych wartości sił wewnętrznych dokonywano sprawdzenia nośności przekroju, co przekładało się na nośność.

Obliczenia według przedstawionego powyżej przebiegu postępowania są w ogólnym przypadku dość pracochłonne, zwłaszcza gdyby chciał jeszcze wprowadzić do statyki nieliniowości materiałowe albo gdy w modelu numerycznym zamierza się utrzymać identyczną oś pręta wzmocnianego w układzie przed i po wzmocnieniu, co jest łatwe tylko w przypadku pręta jak na rysunku 3a. Uwzględnienie sztywności



połączeń o nieliniowej charakterystyce przy stosowaniu procedury przedstawionej w punktach c), d) wymaga pewnego zabiegu, o czym wspomniano w pkt. 4.4. Wstępne wygięcia można spróbować zastąpić odpowiednio dobranym obciążeniem poprzecznym, co nie jest przedmiotem niniejszego artykułu.

#### 4.2. Obliczenia analityczne

W przypadku pręta podwojonego (wzmocnionego) na całej długości przęsła, z przewiązkami rozłożonymi w sposób typowy w projektowaniu złożonych prętów ściskanych (co najmniej dwie pośrednie i dwie skrajne w odpowiednim rozstawie), moment zginający dodany po wzmocnieniu można określić następująco:

$$M_{II} = \frac{(P + \Delta P)(0,5h_0 + f_2)}{1 - \frac{P + \Delta P}{P_{II,cr}} - \frac{P + \Delta P}{S_{II,V}}} - \frac{P(0,5h_0 + f_2)}{1 - \frac{P}{P_{II,cr}} - \frac{P}{S_{II,V}}} \quad (12)$$

gdzie:  $h_0$  - rozstaw osiowy gałęzi,  $P_{II,cr}$  - obciążenie krytyczne pręta złożonego obliczone przy efektywnej wartości momentu bezwładności  $I_{eff}$  określonej w [4],  $S_{II,V}$  - sztywność postaciowa pręta wg [4],  $f_2$  - strzałka wygięcia układu wzmocnionego  $f_2 = \beta_w f_1$  przed przyłożeniem przyrostu  $\Delta P$ , gdzie współczynnik  $\beta_w$  można oszacować według wzoru podobnego do wzoru (11):

$$\beta_w = 1 + \frac{P \cdot \Delta P}{P_{I,cr}^2} : \frac{1}{1 - (P + \Delta P)/P_{II,cr}} \quad (13)$$

Siłę w gałęzi wzmocnianej można określić według wzoru:

$$N = N_I + N_{II} \quad (14)$$

gdzie:  $N_I$  - siła w gałęzi w chwili wzmocnienia, równa sile  $P$ ,  $N_{II}$  - siła w gałęzi obliczona na podstawie  $M_{II}$  według wzoru [4]:

$$N_{II} \approx 0,5\Delta P + \frac{M_{II} h_0 A_{ch}}{2I_{eff}} \quad (15)$$

w którym:  $A_{ch}$  - pole gałęzi,  $I_{eff}$  - efektywna sztywność przekroju złożonego według [4].

Maksymalny moment zginający gałąź (zarówno wzmocnianą, jak i wzmocniającą) w środku przęsła można określić następująco:

$$M_{gal} = 0,5M_{II} \left( 1 - \frac{h_0^2 A_{ch}}{2I_{eff}} \right) \quad (16)$$

natomiast moment całkowity w gałęzi określa się przez dodanie momentu w gałęzi przed wzmocnieniem (ewentualnie zmienionego przez zmianę strzałki wygięcia na skutek wzajemnego dociągania prętów) i momentu  $M_{gal}$ .

Siła określona wg wzorów (14) i (15) oraz moment określony wzorem (16) są już siłami wewnętrznymi drugiego rzędu, uwzględniającymi imperfekcję łukową pręta. Zdaniem autora, wystarczające w tym miejscu będzie sprawdzenie nośności przekroju (inna sytuacja ma miejsce w słupie skratowanym, gdzie w modelu nie uwzględnia się wygięcia pręta między węzłami skratowania; tam należy policzyć nośność na wyobczenie gałęzi między tymi węzłami). Niezależnie należy sprawdzić strefy, w których występuje jednocześnie ściskanie i zginanie ze ścinaniem. Ze względu na specyficzne ukształtowanie elementów w rozpatrywanym przypadku strefy te nie okazały się decydujące, co sprawdzono we wspomnianych wcześniej modelach numerycznych.

### 4.3. Przyjmowanie wartości strzałek pręta złożonego

Na skutek montażu dodatkowej gałęzi o mniejszym lub przeciwnie skierowanym wygięciu niż strzałka wygięcia pręta wzmocnianego strzałka układu złożonego pod obciążeniem  $P$  może być inna niż strzałka przed wzmocnieniem. Wzajemne dociągnięcie prętów powoduje powstanie samorzównoważonego układu sił wewnętrznych. Dla pręta o schemacie jak na rysunku 3a (podwójny na całej lub niemal całej długości, z co najmniej czterema przewiązkami połączonymi dość sztywno z gałęziami, czyli spełniający w przybliżeniu założenia konstrukcyjne w pkt. 6.4. EC3-1-1) można przyjmując średnią wartość strzałki wygięcia pręta wzmocnianego i wzmocniającego. Przykładowo, jeżeli gałąź wzmocniająca byłaby prosta, to pod obciążeniem  $P$  wartość strzałki zredukowana zostałaby o połowę ( $f_2 = 0,5f_1$ ), co jest równoważne z przyjęciem strzałki wstępnego wygięcia układu podwójonego w chwili wzmocnienia równej:

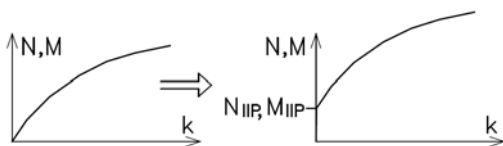
$$e_{II,0} = 0,5e_0 \left( 1 - \frac{P}{P_{II,cr}} - \frac{P}{S_{II,V}} \right) : \left( 1 - \frac{P}{P_{I,cr}} \right) \quad (17)$$

Dla pozostałych przypadków konstrukcyjnych bezpiecznie jest przyjąć, że strzałka w chwili wzmocnienia  $f_2$  równa jest strzałce  $f_1$ , zarówno dla pręta wzmocnianego, jak i wzmocniającego. Założenie takie przyjęto dla układu z dwoma przewiązkami na  $\frac{1}{4}$  oraz  $\frac{3}{4}$  długości przęsła (rys. 3b) i dla układu z dwoma przewiązkami w pobliżu podpór i jedną przewiązką w środku długości (rys. 3c).

### 4.4. Podatność połączenia pręta wzmocniającego ze wzmocnianym

Jeśli w obliczeniach sił wewnętrznych stosuje się procedurę opisaną w pkt. 4.1 lub 4.2, to w chwili wzmocnienia uzyskana zostanie fikcyjna siła w przewiązkach i w pręcie wzmocnianym (nieuwzględniana oczywiście w końcowym rachunku). Jeśli parametry połączenia nie są liniowe (ich sztywność spada wraz ze wzrostem obciążenia), to można doprowadzić do przeszacowania siły w pręcie wzmocnianym, a niedoszacowania w pręcie wzmocniającym. Aby temu zapobiec, można zmodyfikować definiowaną w modelu zależność moment-obrót lub siła-przemiesz-

czenie tak jak przedstawiono na rysunku 7 ( $M_{IIP}$  lub  $N_{IIP}$  na wykresie to poziom siły/momentu w połączeniu dla schematu po wzmocnieniu, obciążonego siłą  $P$  i z zastępczą strzałką  $f_2$ , natomiast  $k$  - sztywność na obrót lub na przesuw). Jeśli zależność sztywności i siły jest liniowa (tak jak zostanie zastosowane w niniejszym artykule), to nie ma potrzeby takiej modyfikacji.

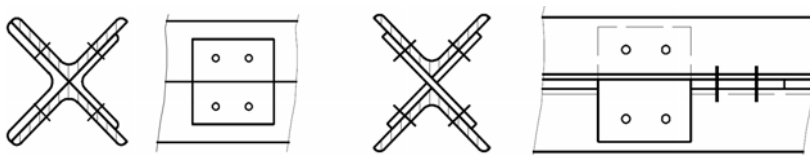


Rys. 7. Korekta charakterystyki podatności (idea)

W obliczeniach uwzględniono cztery warianty połączenia między dwiema gałęziami:

- nieskończenie sztywne (wariant A),
- liniowo podatne na przesuw (wariant B),
- nieskończenie sztywne z uwagi na obrót i utrzymanie odległości gałęzi oraz o zerowej sztywności w kierunku osi pręta, co wyklucza przenoszenie sił osiowych między gałęziami (wariant C),
- obejmy zapewniające jedynie zachowanie odstępu między prętami w punkcie ich połączenia, niepozwalające na przekazywanie sił osiowych oraz momentów zginających między gałęziami (wariant D).

Wariantowi obliczeniowemu C odpowiadają pod względem konstrukcyjnym (oczywiście w przybliżeniu, a nie w sposób idealnie precyzyjny) szerokie obejmy albo połączenia z otworami owalnymi lub zowalizowanymi w kierunku osi gałęzi. Połączenie traktowane jako nieskończenie sztywne w wariantcie A powinno być spawane lub wykonane na śruby sprężające, np. w postaci przykładek z dwóch kątowników lub dwóch prostopadłych do siebie płaskich przekładek (przewiązek).



Rys. 8. Przyjęty układ połączenia dla wariantu B

Dla przypadku B przyjęto układ połączenia jak na rysunku 8. Sztywność na przesuw w kierunku osi pręta dla tego układu oszacowano na  $k_x = 57\,968$  kN/m i przyjęto jako niezmienną. Metodologię obliczania tej sztywności opisano np. w [1].

## 5. Uprozczone ujęcie przez współczynnik wybozeniowy

Dodatkowo postanowiono sprawdzić nośność pręta wzmocnianego za pomocą prostej, bezpiecznej formuły z zastosowaniem współczynników wybozeniowych,

przy pominięciu przenoszenia siły przez pręt wzmacniający (uwzględniając tylko poprawienie stateczności na skutek skrócenia długości wyboczeniowej):

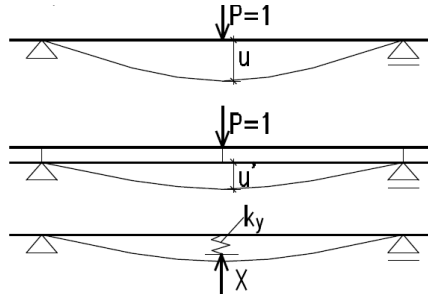
$$\frac{N_{\text{I}}}{A\chi_{\text{I}}} + \frac{N_{\text{II}}}{A\chi_{\text{II}}} \leq \frac{f_y}{\gamma_{\text{M1}}} \quad (18)$$

gdzie  $\chi_{\text{I}}$ ,  $\chi_{\text{II}}$  - współczynniki wyboczeniowe pręta przed i po wzmocnieniu obliczone zgodnie z normowymi krzywymi (np. podanymi w [4]).

Długości wyboczeniowe można ustalać, korzystając z różnych sposobów. Przykładowo, dla prętów z powiązanych ze sobą tuż nad podporą oraz w środku przęsła, obecność dodatkowego pręta można zastąpić sprężyną o odpowiednio dobranej sztywności i dla takiego schematu znaleźć stabilizowane wielkości. Dla pręta, jak na rysunku 9, sztywność  $k_y$  zastępczej środkowej podpory w kierunku  $y$  można określić na podstawie warunków zgodności przemieszczeń pręta wzmacnianego i wzmacniającego w punktach ich wzajemnych połączeń, korzystając ze wzoru:

$$k_y = X/\Delta u \quad (19)$$

w którym:  $X$  - siła wzajemnego oddziaływania między prętami przy zastępczym oddziaływaniu bocznym,  $\Delta u$  - różnica przemieszczeń elementu niewzmocnionego  $u$  i wzmacnionego  $u'$  w miejscu dodatkowej podpory (por. rys. 9).



Rys. 9. Zamiana pręta dodatkowego na sprężynę

Jeżeli połączenia skrajne obu prętów znajdują się tuż przy węzłach końcowych lub dokładnie w tych węzłach, to podatność  $k$  podpory pręta, jak na rysunku 9, można określić w przybliżeniu jako:

$$k_y = 48EI_{2z}/L^3 \quad (20)$$

## 6. Wyniki obliczeń

### 6.1. Pręt z czterema przewiązkami

W tabeli 2 zamieszczono wartości nośności przy wyboczeniu w kierunku prostopadłym do osi  $z$ - $z$  pręta wzmocnionego, jak na rysunku 3a, który został wstępnie

wygięty w stronę naroża przy zbiegu pólek. Przy wygięciu takim uzyskuje się wprawdzie nieco większą nośność sprężystą pręta pojedynczego niż przy wygięciu przeciwnym, niemniej jest ono niekorzystniejsze dla pręta złożonego z wprowadzonym mimośrodem i z tego względu będzie decydujące (dla pręta złożonego wygięcie przeciwne niż założone w obliczeniach może nawet być okolicznością korzystną). Do obliczenia  $f_2$  na podstawie  $f_1$  we wzorze (12) zastosowano współczynnik  $\beta_w$  według wzoru (13). Jako wartość  $e_0$  do obliczenia  $f_1$  przyjmowano  $L/250 = 1,00$  cm.

TABELA 2

**Porównanie nośności plastycznych pręta z czterema przewiązkami**

	Sposób określenia przemieszczeń i nośności	Wyężenie w chwili wzmocnienia [%]				Podatność Wariant wg pkt. 4.4
		0	30	50	70	
Nośność [kN]	Wzór (10) dla długości $L_{cr} = L/3$	604,2	522,6	468,8	414,7	–
	Wzory (12)-(15) w pkt. 4.2, $f_2 = 0,5f_1$	553,5	539,1	534,1	511,2	A
	Wzory (12)-(15) w pkt. 4.2, $f_2 = f_1$	530,1	500,0	476,2	440,9	
	Model numeryczny, $f_2 = 0,5f_1$	558,6	552,5	543,7	526,2	
	Model numeryczny, $f_2 = f_1$	532,7	–	–	450,5	
	Model numeryczny, $f_2 = 0,5f_1$	554,7	546,8	536,9	519,7	B
	Model numeryczny, $f_2 = f_1$	519,7	498,9	475,1	438,0	B
	Model numeryczny, $f_2 = 0,5f_1$	559,4	543,9	530,2	510,3	C
	Model numeryczny, $f_2 = f_1$	500,6	475,8	452,8	420,0	C
	Model numeryczny, $f_2 = 0,5f_1$	–	–	–	–	D
	Model numeryczny, $f_2 = f_1$	503,0	–	–	423,0	D

Wpływ różnicy podatności między różnymi wariantami połączeń na ostateczne wartości nośności uzyskane w obliczeniach numerycznych można ocenić jako kilku-procentowy, natomiast wpływ poziomu obciążenia może być większy, lecz nawet przy 70% wykorzystania nośności w chwili wzmocnienia i tak nie przekracza 20% (z wyjątkiem wyników uzyskanych na podstawie zależności (18)). Współczynnik długości wybozeniowej dla elementu między przewiązkami powinien wynosić nieco więcej niż 1 (przynajmniej przy niskich poziomach obciążenia wstępnego). Ujęcie efektywności wzmocnienia przez potraktowanie dodatkowego pręta jako sprężystości (podatnie) podpartego drugim prętem wydaje się bezpieczne i efektywne, a dla wariantu połączenia „A” najbardziej właściwe jest korzystanie ze wzorów analitycznych (12)-(15). Pod warunkiem dokonania w obliczeniach odpowiednich modyfikacji sztywności postaciowej pręta wzory te można zastosować również w przypadku zaprojektowania połączenia w wariacie „B”.

### 6.2. Układ wieloprzęsłowy z dwoma przewiązkami w przęśle

Uzyskane na podstawie analizy modelu numerycznego wartości nośności przy wyboczeniu w osi z-z lewego przęsła w układzie o zarysie przedstawionym na rysunku 3b zestawiono w tabeli 3. Nośność schematu ciągłego w porównaniu do pręta jednoprzęsłowego (por. rys. 3a i tab. 2) jest silniej zależna od zdolności do przekazywania siły podłużnej przez przewiązki między gałęziami. Znaczącą skuteczność wzmocnienia uzyskano, stosując przewiązki sztywne, natomiast przy zastosowaniu przewiązek nieprzenoszących sił wzdłuż pręta korzyści ze wzmocnienia są znacznie mniejsze. Skuteczność wzmocnienia w funkcji obciążenia w trakcie jego wykonywania również maleje znacznie szybciej niż w układzie z rysunku 3a, przy czym tempo spadku nośności jest największe w elementach z przewiązkami sztywnymi.

TABELA 3

#### Porównanie nośności plastycznych pręta z dwoma przewiązkami

	Wyężenie w chwili wzmocnienia [%]				Podatność Wariant wg pkt. 4.4
	0	30	50	70	
Nośność [kN]	1047	903,9	795,1	653,1	A
	553,2	520,2	489,0	444,7	C
	535,5	504,3	474,7	433,7	D

### 6.3. Pręt z jedną przewiązką pośrodku przęsła

W tabeli 4 zestawiono wartości nośności pręta w układzie jak na rysunku 3c przy wyboczeniu w kierunku prostopadłym do osi  $\eta$ - $\eta$ . Rozpatrzono przypadek, w którym pręt wzmocniany potraktowany został jako podparty sprężystie w środku przęsła za pomocą drugiego, nieprzenoszącego siły osiowej pręta.

TABELA 4

#### Porównanie nośności pręta z przewiązką obliczonych różnymi metodami

Sposób określenia przemieszczeń i nośności [kN]	Wyężenie w chwili wzmocnienia [%]				Podatność Wariant wg pkt. 4.4
	0	30	50	70	
Model numeryczny przy strzałce $e_0 = L/250$ , nośność plastyczna przekroju	507,2	481,0	445,2	424,8	D
Nośność pojedynczego kątownika wg wzoru (18) przy długości wyboczeniowej $L_{cr} = 0,5L$	551,6	485,9	442,5	399,0	D
Nośność pojedynczego kątownika wg wzoru (18) przy długości wyboczeniowej $L_{cr} = 0,62L$	507,2	454,8	420,3	385,7	D
Nośność pojedynczego kątownika wg wzoru (18) przy długości wyboczeniowej $L_{cr} = 0,68L$	479,9	435,8	406,7	377,4	D

W obliczeniach uproszczonych pręt podpierający można potraktować jako sprężynę o charakterystyce obliczonej wg wzoru (20), co pozwala na przyjęcie długości wyboyczeniowej równej  $\sim 0,68$  długości przęsła [6]. Stosowanie długości wyboyczeniowej pręta ze środkową podporą sprężystą i wzoru (18) daje wartości bezpieczne. Współczynnik długości wyboyczeniowej dla elementu między przewiązkami powinien wynosić więcej niż 1 i można go oszacować jak wcześniej opisano.

#### 6.4. Podsumowanie wyników

Ujęcie efektywności wzmocnienia przez potraktowanie gałęzi wzmocnianej jako sprężystości (podatnie) podpartej gałęzią dodatkową wydaje się bezpieczne i efektywne, a w przypadku pręta według schematu z rysunku 3a z przewiązkami łączonymi sztywno (wariant A) właściwe jest również korzystanie ze wzorów analitycznych (12)-(15). W przypadku stosowania połączeń podatnych należałoby odpowiednio zmodyfikować sztywność postaciową  $S_{II,V}$ , co jednak nie zostało ujęte w [4] i w niniejszym opracowaniu. Należy mieć na uwadze, że wartości nośności podane w tabelach ustalono, wykorzystując rezerwę plastyczną przekroju po wzmocnieniu (w chwili wzmocnienia pręty są sprężyste). Stosowanie tej rezerwy wyjaśniono w pkt. 3.2 i 3.3, aczkolwiek jej stosowanie może budzić pewien niepokój zwłaszcza przy stosowaniu imperfekcji pomierzonych, a nie normowych. Wydaje się, że dla imperfekcji pomierzonych należy stosować co najwyżej 50% rezerwy plastycznej na zginanie zredukowanej ze względu na ściskanie, najlepiej zaś analizować warunki sprężyste.

### 7. Program dalszych prac

W dalszych analizach należy dokładniej uwzględnić wpływ wymuszenia zmiany krzywizny gałęzi wzmocnianej w trakcie montażu gałęzi wzmocniającej (wzajemne dociąganie elementów), w szczególności wpływ na ostateczny rozkład sił wewnętrznych w nowo powstałym układzie i zmianę wartości obciążenia krytycznego (niszczącego). Inne zagadnienia to problem wprowadzania do wstępnie obciążonego pręta naprężeń spawalniczych albo osłabiania go otworami w trakcie robót. Należałoby także przeanalizować przypadek wyboyczenia przy przestrzennej formie wstępnej imperfekcji oraz określić wpływ wzmocnienia na wzrost nośności przy wyboyczeniu kątownika w mocniejszej osi ( $\xi$ - $\xi$ ).

Ostatecznym celem prowadzonych analiz mają być w zamyśle autora proste formuły analityczne (ewentualnie wspomagane graficznie), pozwalające na szybkie i możliwie dokładne oszacowanie wszelkich istotnych czynników wpływających na nośność dla różnych rozwiązań wzmocnień stosowanych w praktyce. Rozwiązania te autor zamierza sprawdzać doświadczalnie w miarę uzyskiwania takich możliwości, na przykład na schematach przedstawionych na rysunku 3.

## Podsumowanie

Temat wzmocniania konstrukcji z różnymi imperfekcjami i o różnym poziomie obciążenia w chwili wzmocnienia stanowi nie do końca jeszcze zagospodarowany obszar działań inżynierskich, zarówno na polu teoretycznym, jak i doświadczalnym. Spodziewać się należy, że w najbliższym czasie temat ten będzie budził szersze zainteresowanie w zakresie nauki i praktyki.

## Literatura

- [1] Zamorowski J., Gremza G., Wzmocnianie kratowych konstrukcji typu wieżowego, XXXI Ogólnopolskie Warsztaty Pracy Projektanta Konstrukcji, Szczyrk, 24-27 lutego 2016 roku. T. 3, Wykłady. Polski Związek Inżynierów i Techników Budownictwa. Oddział w Katowicach, 2016, 481-558.
- [2] Zhuge Y., Mills J.E., Ma X., Modelling of steel lattice tower angle legs reinforced for increased load capacity, *Engineering Structures* 2012, 43, 160-168.
- [3] Mills J.E., Ma X., Zhuge Y., Experimental study on multi-panel retrofitted steel transmission towers, *Journal of Constructional Steel Research* 2012, 78, 58-67.
- [4] PN-EN 1993-1-1: Projektowanie konstrukcji stalowych - Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków.
- [5] PN-EN 1090-2. Wykonanie konstrukcji stalowych i aluminiowych. Część 2: Wymagania techniczne dotyczące konstrukcji stalowych.
- [6] Poradnik projektanta konstrukcji metalowych, Praca zbiorowa, Tom 1, Arkady, Warszawa 1980.

## Streszczenie

W artykule przeanalizowano efektywność wzmocnienia kątownika przez dodanie dodatkowego elementu, mocowanego do elementu wzmocnianego w wybranych punktach. Siłę w węzłach końcowych przykładano do pręta wzmocnianego, co wynika z rozwiązań często stosowanych w praktyce. Pojedynczy pręt z imperfekcją lukową obciążano przed wzmocnieniem siłą osiową mniejszą od jego nośności. W analizie nośności pręta złożonego powstałego na skutek dodania dodatkowej gałęzi uwzględniono wspomniane obciążenie wstępne w chwili wzmocnienia, mimośrodowość przyłożenia obciążenia, podatność połączeń oraz możliwość uwzględnienia uplastycznienia przekroju w kątowniku pierwotnym (wzmocnianym). Oszacowane wartości nośności porównano z nośnością pręta wykonanego od początku jako złożony i obciążony mimośrodowo. Określono wstępnie proponowany obszar prac badawczych w omawianym w artykule zakresie.

**Słowa kluczowe:** konstrukcje stalowe, wzmocnienie, imperfekcje, nośność

## **Analysis of the strengthening effectiveness of angle member by addition of the second one**

### **Abstract**

In this article effectiveness of strengthening of angle member by use of additional "new" member that is attached to the "old" member in selected points was analysed. The loading force was applied



at the end points of “old” member intended to be strengthened. This way of load application is a result of the solutions commonly used in practice. Single bar with initial bow imperfection was loaded before strengthening with axial force lower than its load capacity. In the presented analysis of built-up member formed thanks to new branch addition, the aforementioned initial loading force was included as well as load eccentricity, joint flexibility and plasticization of cross-section of strengthened angle. Estimated load capacities were compared with load capacity of a member that was initially prefabricated as a built-up member, eccentrically loaded. An experimental research program including problems mentioned in this article was initially mentioned.

**Keywords:** steel structures, strengthening, imperfections, bearing capacity