



## O zastosowaniu wzorów aproksymujących funkcję osiadań powierzchni terenu wskutek podziemnej eksploatacji złóż na potrzeby analiz w budownictwie na terenach górniczych

Witold Paleczek<sup>1</sup>

### STRESZCZENIE:

Przedstawiono wzory aproksymujące obniżenia powierzchni terenu wynikające ze statystyczno-całkowej teorii Knothego-Budryka. Zaprezentowane wzory matematyczne odniesiono do zastosowań w ujęciu przestrzennym. Porównano różnice wyników otrzymywanych ze wzorów całkowych i proponowanych wzorów aproksymujących. Prezentowane rozwiązania mają zastosowanie w modelowaniu deformacji powierzchni terenu wskutek podziemnej eksploatacji złóż przy analizach stosowanych w budownictwie na terenach górniczych. Zaproponowane rozwiązania nie wymagają stosowania rachunku całkowego przy zachowaniu równorzędnej dokładności obliczeń.

### SŁOWA KLUCZOWE:

deformacja górotworu; modelowanie; wzory całkowite i aproksymujące; teoria Knothego-Budryka; budownictwo na terenach górniczych

## 1. Wprowadzenie

W budownictwie na terenach górniczych do obliczania wpływów eksploatacji górniczej na powierzchnię terenu stosowany jest często model matematyczny znany w literaturze przedmiotu jako „Teoria Knothego-Budryka” [1-4]. Model ten zaklasyfikowany jest do teorii statystyczno-całkowych [3]. Jako funkcję obniżeń (osiadań terenu) wskutek podziemnej eksploatacji złóż pokładowych przyjmuje się tam odpowiednie wzory, stosując analogię do krzywej rozkładu normalnego, znanej powszechnie pod nazwą „krzywej Gaussa” lub „krzywej dzwonowej”. Wzory całkowite tej teorii poddano próbie aproksymacji w taki sposób, aby w efekcie można było wykonywać skuteczne obliczenia bez konieczności stosowania rachunku całkowego przy zachowaniu równorzędnej dokładności obliczeń. Zaproponowane wzory matematyczne udało się przedstawić w postaci algebraicznej z zachowaniem dokładności obliczeń akceptowalnych w zastosowaniach inżynierskich przy rozwiązywaniu zadań modelowania deformacji powierzchni terenu wskutek podziemnej eksploatacji górniczej.

## 2. Zadanie aproksymacji wzoru teorii geometryczno-całkowej

W teorii Knothego-Budryka przemieszczenia pionowe w przypadku pojedynczego pola eksploatacyjnego w realizacji rozwiązania zadania przestrzennego określono wzorem [1-3]

<sup>1</sup> Politechnika Częstochowska, Wydział Budownictwa, ul. Akademicka 3, 42-218 Częstochowa, e-mail: witold.paleczek@pcz.pl, orcid id: 0000-0003-4742-2078

$$w_{(1)}(x, y) = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{a \cdot g}{\left(\frac{H}{T}\right)^2} \cdot e^{-\pi \left[ (\xi - y)^2 + (\eta - x)^2 \right] \left(\frac{H}{T}\right)^2} d\xi d\eta \quad (1)$$

We wzorze (1) zastosowano oznaczenia, które na potrzeby niniejszej publikacji nieco zmieniono w odniesieniu do standardów stosowanych w przedmiotowej literaturze - zabieg ten nie wpływa w efekcie końcowym na zmianę kontekstu obliczeniowego, gdyż omawiany jest tu tylko jeden wskaźnik deformacji, a mianowicie obniżenie (osiadanie terenu); wyjaśnienie oznaczeń:

$w_{(1)}(x, y)$  - wartości osiadań w punkcie o podanych współrzędnych realizowane w równaniu (1),  
 $a$  - współczynnik eksploatacyjny (współczynnik wypełnienia pustki eksploatacyjnej),  
 $g$  - grubość wyeksploatowanej warstwy (tzw. wysokość furty eksploatacyjnej),  
 $H$  - głębokość zalegania eksploataowanej warstwy złoża,  
 $T$  - skrót od:  $tg(\beta)$ , przy czym  $\beta$  jest kątem zasięgu wpływów głównych; w literaturze przedmiotu przyjmuje się oznaczenie promienia zasięgu wpływów  $r$  oznaczanych jako:  $r = \frac{H}{tg(\beta)}$ .

Wartość obniżenia określoną wzorem (1) można obliczyć z rozwinięcia podanego we wzorze

$$w_{(2)}(x, y) = \frac{\pi \cdot a \cdot g}{4 \cdot N} \cdot \left[ \operatorname{erf} \left( T \cdot \sqrt{N} \cdot \left( \frac{y - Y2}{H} \right) \right) - \operatorname{erf} \left( T \cdot \sqrt{N} \cdot \left( \frac{y - Y1}{H} \right) \right) \right] \cdot \left[ \operatorname{erf} \left( T \cdot \sqrt{N} \cdot \left( \frac{x - X2}{H} \right) \right) - \operatorname{erf} \left( T \cdot \sqrt{N} \cdot \left( \frac{x - X1}{H} \right) \right) \right] \quad (2)$$

Wzór (2) jest propozycją uniwersalnego przekształcenia wzoru (1) z wykorzystaniem funkcji błędu ERF, przy czym jego uniwersalność polega na tym, że wprowadzono tu zmienną  $N$ , która przy założeniu, że  $N = \pi$ , prowadzi do rozwiązań spotykanych w dotychczasowej literaturze, natomiast przy  $N \neq \pi$ , można również uzyskiwać szereg możliwości w modelowaniu matematycznym przy zastosowaniu wzoru (1) za pomocą wzoru (2). Różne autorskie sposoby realizacji obliczeń numerycznych funkcji ERF omówiono szczegółowo w pracach [2, 4].

Aproksymację wzoru (1) przeprowadzono w oparciu o aproksymację statystycznej funkcji błędu ERF, uzyskując rozwiązanie określone wzorem [4]

$$w_{(3)}(x, y) = \left( \frac{\pi \cdot a \cdot g}{4 \cdot N} \right) \cdot \left[ \left( 1 - \frac{2}{1 + e^{2.4 \cdot \left( T \cdot \sqrt{N} \cdot \left( \frac{y - Y2}{H} \right) \right)}} \right) - \left( 1 - \frac{2}{1 + e^{2.4 \cdot \left( T \cdot \sqrt{N} \cdot \left( \frac{y - Y1}{H} \right) \right)}} \right) \right] \cdot \left[ \left( 1 - \frac{2}{1 + e^{2.4 \cdot \left( T \cdot \sqrt{N} \cdot \left( \frac{x - X2}{H} \right) \right)}} \right) - \left( 1 - \frac{2}{1 + e^{2.4 \cdot \left( T \cdot \sqrt{N} \cdot \left( \frac{x - X1}{H} \right) \right)}} \right) \right] \quad (3)$$

Wzór (3) jest pierwszym przybliżeniem aproksymacji wzoru (1). Porównanie wyników otrzymywanych z obu wzorów można przeprowadzić na przykładzie obliczeniowym, przyjmując następujące wartości parametrów testowych:

$$\begin{aligned}
 a &= -0.7, \\
 g &= 3.9m, \\
 H &= 250m, \\
 T &= 2, \\
 X1 &= 150m, \\
 X2 &= 450m, \\
 Y1 &= 350m, \\
 Y2 &= 850m, \\
 N &= \pi
 \end{aligned}$$

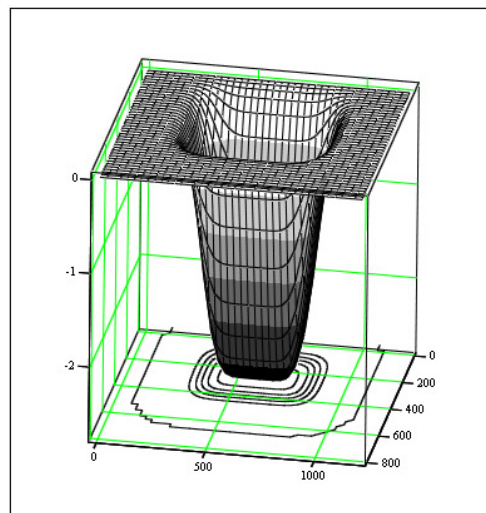
Jak wynika z danych wejściowych do równań (1), (2) oraz (3), testowany obszar odpowiada eksploatacji przykładowego pola jako prostokąta o wymiarach 300 x 500 m o równomiernej miąższości 3.9 m, zalegającego na głębokości 250 m; wielkość prostokątnego obszaru wynika odpowiednio z różnic współrzędnych:

$$X2 - X1 = 300m$$

$$Y2 - Y1 = 500m$$

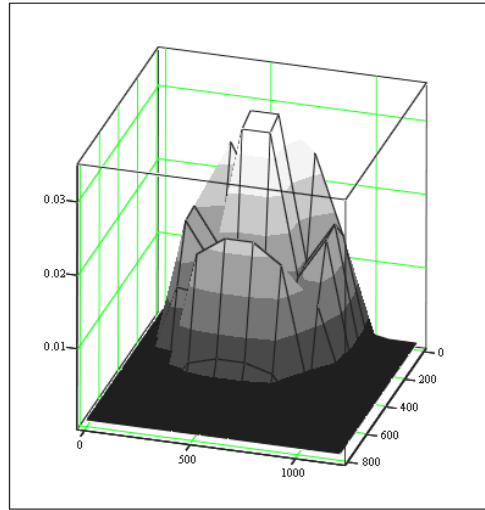
W wyniku obliczeń i analiz uzyskano wykresy, które przedstawiono odpowiednio na rysunkach: na rysunku 1 - wykres przestrzenny funkcji osiadań powierzchni terenu, natomiast na rysunku 2 - wykres przestrzenny różnic w otrzymanych wynikach obliczeń ze wzorów (1) i (3). Różnice te obliczono ze wzoru (4)

$$d_w = |w_{(1)} - w_{(3)}| \quad (4)$$



$w, w$

**Rys. 1.** Wykres 3D funkcji określonych wzorami (1), (2) oraz (3); oznaczenia osi na wykresie: oś pionowa jest osiadaniem wyrażonym w [m], osie poziome: wartości do zwymiarowania pola eksploatacyjnego w lokalnym układzie odniesienia z naniesionym widokiem odrzutowanych izolinii niecki obniżeniowej [m]



dw

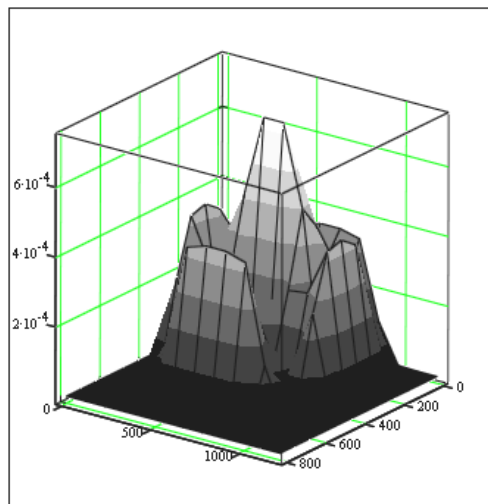
**Rys. 2.** Wykres 3D bezwzględnej wartości z różnic według wzoru (4); zauważamy, że maksymalne różnice uzyskiwane z omawianych wzorów nie przekraczają tu wartości  $\pm 0.04m = \pm 40mm$

Ze względu na uproszczenie formuły (3), która jest przybliżonym rozwiązaniem równania (1), występują oczywiste różnice w otrzymywanych wartościach rzędu do  $\pm 0.04m = \pm 40mm$ . Wynikają one z zastosowanych procedur aproksymacyjnych - różnice te uwidoczniono na wykresie (rys. 2).

W celu zwiększenia dokładności obliczeń podjęto kolejną próbę aproksymacji, uzyskując w efekcie rozwiązanie określone wzorem

$$\begin{aligned}
 w_{(5)}(x, y) = & \frac{\pi \cdot a \cdot g}{4 \cdot N} \cdot \left[ 1 - \frac{2}{1 + e^{\frac{0.2007 \left( T \cdot \sqrt{N} \cdot \left( \frac{y-Y2}{H} \right)^3 + 2.2586 \cdot \left( T \cdot \sqrt{N} \cdot \left( \frac{y-Y2}{H} \right) \right) \right)}}}{1 + e^{\frac{0.2007 \left( T \cdot \sqrt{N} \cdot \left( \frac{y-Y1}{H} \right)^3 + 2.2586 \cdot \left( T \cdot \sqrt{N} \cdot \left( \frac{y-Y1}{H} \right) \right) \right)}}} \right] - \dots \\
 & \dots - \left[ 1 - \frac{2}{1 + e^{\frac{0.2007 \left( T \cdot \sqrt{N} \cdot \left( \frac{y-Y1}{H} \right)^3 + 2.2586 \cdot \left( T \cdot \sqrt{N} \cdot \left( \frac{y-Y1}{H} \right) \right) \right)}}}{1 + e^{\frac{0.2007 \left( T \cdot \sqrt{N} \cdot \left( \frac{y-Y2}{H} \right)^3 + 2.2586 \cdot \left( T \cdot \sqrt{N} \cdot \left( \frac{y-Y2}{H} \right) \right) \right)}}} \right] \dots \\
 & \dots \cdot \left[ 1 - \frac{2}{1 + e^{\frac{0.2007 \left( T \cdot \sqrt{N} \cdot \left( \frac{x-X2}{H} \right)^3 + 2.2586 \cdot \left( T \cdot \sqrt{N} \cdot \left( \frac{x-X2}{H} \right) \right) \right)}}}{1 + e^{\frac{0.2007 \left( T \cdot \sqrt{N} \cdot \left( \frac{x-X1}{H} \right)^3 + 2.2586 \cdot \left( T \cdot \sqrt{N} \cdot \left( \frac{x-X1}{H} \right) \right) \right)}}} \right] - \dots \\
 & \dots - \left[ 1 - \frac{2}{1 + e^{\frac{0.2007 \left( T \cdot \sqrt{N} \cdot \left( \frac{x-X1}{H} \right)^3 + 2.2586 \cdot \left( T \cdot \sqrt{N} \cdot \left( \frac{x-X1}{H} \right) \right) \right)}}}{1 + e^{\frac{0.2007 \left( T \cdot \sqrt{N} \cdot \left( \frac{x-X2}{H} \right)^3 + 2.2586 \cdot \left( T \cdot \sqrt{N} \cdot \left( \frac{x-X2}{H} \right) \right) \right)}}} \right] \dots
 \end{aligned} \tag{5}$$

Na rysunku 3 przedstawiono różnice wartości z obliczeń według wzorów (1) i (5), które nie przekraczają wartości  $\pm 7 \cdot 10^{-4} m = \pm 0.7 mm$ .



$\Delta w$

**Rys. 3.** Wykres 3D obliczonych różnic wartości  $\Delta w$  otrzymanych ze wzoru (1) i wzoru (5) jako:  $\Delta w = |w_{(1)} - w_{(5)}|$ ; zauważamy, że maksymalne różnice nie przekraczają tu wartości  $\pm 7 \cdot 10^{-4} m = \pm 0.7 mm$

### 3. Wnioski

Proponowane wzory matematyczne (3) i (5), które aproksymują wzór (1) na osiadanie w teorii Knothe-go-Budryka, mogą być stosowane w obliczeniach szacunkowych wartości osiadań bez konieczności stosowania, jak to ma miejsce w przypadku wzoru (1), rachunku całkowego z zachowaniem równorzędnej dokładności wyników z obliczeń - stanowią one jednocześnie przybliżone rozwiązania wzorów całkowych w tej Teorii. Uzyskany maksymalny błąd obliczeń osiadania powierzchni terenu rzędu dziesiątych części milimetra (na przykład obliczenia przy zastosowaniu wzoru (5) względem wzoru (2)) można uznać za akceptowalny w zastosowaniach inżynierskich przy modelowaniu deformacji powierzchni terenu wskutek podziemnej eksploatacji złóż pokładowych, a wynikających z potrzeb analiz w budownictwie na terenach górniczych.

### Literatura

- [1] Knothe S., Prognozowanie wpływów eksploatacji górniczej, Wydawnictwo Śląsk, Cieszyn 1984.
- [2] Paleczek W., Modelowanie deformacji powierzchni terenu wskutek podziemnej eksploatacji górniczej w aspekcie budownictwa na terenach górniczych, Seria Monografie nr 252, Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa 2013.
- [3] Kwiatek J. (red.), Ochrona obiektów budowlanych na terenach górniczych, Wydawnictwo Głównego Instytutu Górnictwa, Katowice 1998.
- [4] Paleczek W., O problemach w modelowaniu deformacji powierzchni terenu w aspekcie budownictwa na terenach górniczych, Zeszyty Naukowe Politechniki Częstochowskiej 2018, seria Budownictwo 24, 267-272.

## **On the use of formulas approximating the function of subsidence due to underground mining of the deposits for the needs of construction in mining areas**

### **ABSTRACT:**

Formulas approximating depressions in the area were presented. These functions are from Knothe-Budryk theory. Mathematical formulas are for use in three-dimensional problems. The differences of results obtained from integral formulas and approximating formulas were compared. The presented solutions are used in modeling deformation of mining areas. The proposed solutions do not require the use of integral calculus, but equivalent accuracy is maintained.

### **KEYWORDS:**

rock mass deformation; modeling; integral and approximation formulas; Knothe-Budryk theory; construction in mining areas