

Mariusz Poński

IDENTYFIKACJA PARAMETRÓW PRZEGRODY JEDNOWARSTWOWEJ W WARUNKACH POŻARU - ALGORYTM OBLICZENIOWY

Wprowadzenie

Wiele obiektów budowlanych narażone jest na ryzyko wystąpienia pożaru i, co za tym idzie, projektant musi przyjąć takie rozwiązanie, które zapewni odpowiednią nośność, izolacyjność oraz szczelność projektowanej przegrody. Aby wymagania te były spełnione, należy zastosować odpowiednią konstrukcję przegrody oraz odpowiedni materiał. Dobór materiału wiąże się z określeniem jego parametrów w zależności od wielu czynników, m.in. temperatury oraz czasu. Często jest to zagadnienie trudne i wymagające zastosowania złożonych technik pomiarowych. Poza tym rozkład parametrów w funkcji grubości elementu oraz powierzchniowy rozkład temperatury wywołany pożarem jest procesem losowym. Czynniki te powodują, że badania przeprowadzane w niestacjonarnej temperaturze (warunki bardziej zbliżone do rzeczywistych) sprawiają trudności interpretacyjne. Pomocnym narzędziem podczas ww. badań może okazać się wyznaczenie parametrów przez tzw. zagadnienie odwrotne. Dysponując np. pomiarami temperatury w określonych odległościach wewnątrz próbki, można zidentyfikować wartość poszukiwanego parametru. W niniejszej pracy przedstawiono uproszczony model przepływu ciepła przez przegrodę zewnętrzną w postaci ściany betonowej oraz sposób wyznaczania przewodności cieplnej za pomocą zagadnienia odwrotnego. Rozważania zilustrowano przykładem obliczeniowym.

1. Modelowanie procesu przepływu ciepła przez przegrodę

Zjawiska przewodzenia ciepła opisuje się zwykle, wykorzystując prawo Fouriera, które dla zagadnień jednowymiarowych można przedstawić w postaci (możliwość wykorzystania innych modeli opisano w pracy [1]):

$$q = -k(T(x,t)) \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \quad (1)$$

gdzie q jest gęstością strumienia ciepła [W/m^2], $k(T(x,t))$ współczynnikiem przewodności cieplnej w funkcji temperatury [$\text{W}/\text{m}\cdot\text{K}$], $T(x,t)$ temperaturą [K].

Podstawiając równanie (1) do równania bilansu energii, otrzymuje się równanie różniczkowe nieustalonego przewodzenia ciepła:

$$\rho(T(x,t))c_p(T(x,t))\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(T(x,t))\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right) \quad (2)$$

Rozwiązanie równania (2) wymaga przyjęcia odpowiednich warunków początkowych oraz brzegowych. Warunki początkowe, nazwane ogólnie warunkami Cauchy'ego, określają rozkład temperatury w początkowej fazie procesu. Najczęściej spotykane warunki brzegowe to warunki pierwszego rodzaju (Dirichleta), drugiego rodzaju (von Neumanna), trzeciego rodzaju (Robina), czwartego rodzaju (na powierzchni styku dwóch ciał) oraz warunki nieliniowe. Szczegółowe omówienie ww. warunków można znaleźć w pracy [2]. W celu zamodelowania procesu przepływu ciepła w niniejszej pracy zastosowano następujące warunki brzegowo-początkowe: nieliniowy mieszany warunek brzegowy modelujący warunki pożaru (powierzchnia zewnętrzna):

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial x}k(T(0,t)) = \alpha_c(T_f(t) - T(0,t)) + \varepsilon_r\sigma\left((T_f(t))^4 - T^4(0,t)\right) \quad (3)$$

gdzie α_c oznacza współczynnik przejmowania ciepła przez konwekcję [$\text{W}/\text{m}^2\cdot\text{K}$], ε_r - emisyjność powierzchni elementu, σ - stałą Stefana-Boltzmana [$\text{W}/\text{m}^2\cdot\text{K}^4$], $T_f(t)$ - temperaturę promieniowania środowiska pożaru [K], warunek brzegowy drugiego rodzaju (von Neumanna) na powierzchni wewnętrznej:

$$\frac{\partial T(L,t)}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

oraz warunek początkowy

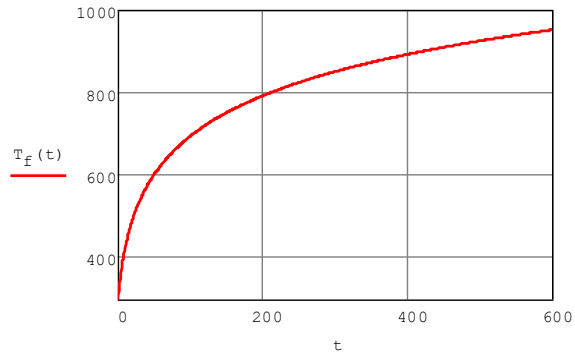
$$T(x,0) = 293,15 \text{ K} \quad (5)$$

W równaniu (3) występuje temperatura promieniowania środowiska, która reprezentuje wzrost temperatury pożaru w funkcji czasu. Typowe krzywe temperatura-czas można znaleźć w normie Eurokod 1 [3]. W analizowanym przypadku przyjęto krzywą standardową opisaną równaniem:

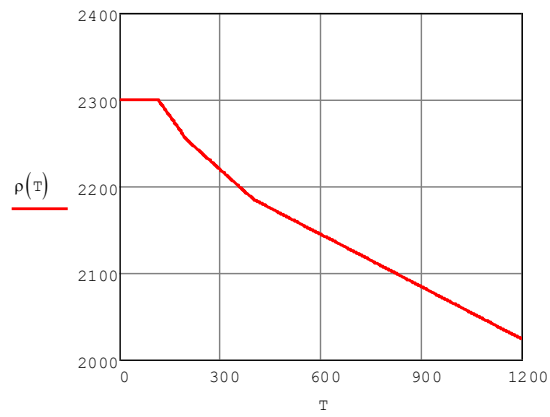
$$T_f(t) = 293,15 + 345,0 \log_{10}(0,1333t + 1) \quad (6)$$

Rozwiązanie wyżej postawionego zagadnienia brzegowo-początkowego wymaga również określenia postaci funkcyjnej parametrów materiałowych $\rho(T(x,t))$, $c_p(T(x,t))$ oraz $k(T(x,t))$ w równaniu (3). Na rysunkach 2-4 przedstawiono wykresy

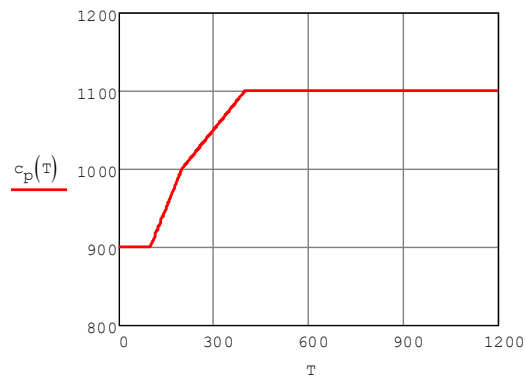
tych parametrów dla betonu krzemianowego. Zostały one zaczerpnięte z normy Eurokod 2 [4].



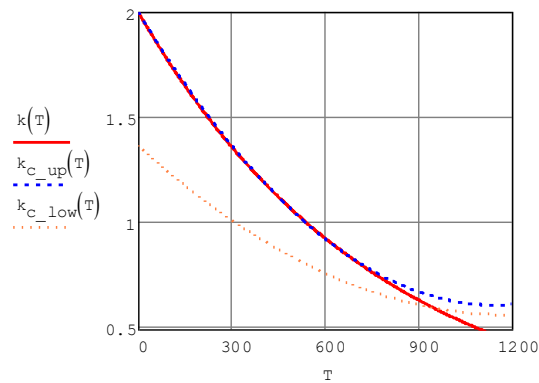
Rys. 1. Krzywa standardowa temperatura [K] - czas [s]



Rys. 2. Funkcja: gęstość betonu [kg/m^3] - temperatura [$^{\circ}\text{C}$]



Rys. 3. Funkcja: ciepło właściwe [$\text{J/kg}\cdot\text{K}$] - temperatura [$^{\circ}\text{C}$], dla wilgotności 0,0% masy



Rys. 4. Funkcja: przewodność cieplna [W/m·K] - temperatura [°C]

Przedstawione parametry są zależne również od wilgotności. W dalszej części pracy założono wilgotność równą 0,0% oraz stałą wartość parametrów $\rho(T(x,t))$ i $c_p(T(x,t))$. Funkcję przewodności cieplnej opisano równaniem:

$$\begin{aligned}
 k(T) &= k_0 e^{k_1 T} \\
 k_0 &= 2,0 \\
 k_1 &= -0,0013
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

2. Zagadnienie odwrotne

Zagadnienie odwrotne ogólnie można przedstawić jako wyznaczanie parametrów równania (lub układu równań), warunków brzegowych bądź warunków początkowych na podstawie przybliżonych wartości rozwiązania równania (lub układu równań) w określonych punktach rozpatrywanego obszaru. Inaczej, zagadnienie to polega na poszukiwaniu przyczyny, jeżeli znany jest skutek. Ze względu na możliwe błędy rozwiązania (np. niemożliwe do uniknięcia błędy pomiarowe) tak postawiony problem nosi nazwę źle postawionego (ill-posed problem) lub źle uwarunkowanego. Prawidłowo postawiony problem powinien spełniać następujące założenia: istnienia, jednoznaczności i stabilności (dwa ostatnie to tzw. warunki Hadamarda). Duża część z zadań odwrotnych nie spełnia tych założeń, ale wyznaczone rozwiązania są użyteczne z inżynierskiego punktu widzenia. Zagadnienie to było tematem wielu opracowań, m.in. [2, 5-9].

Rozwiązanie wyżej opisanego problemu można otrzymać przez minimalizację normy średniokwadratowej:

$$S(\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^I [Y_i - T_i(\mathbf{P})]^2 \rightarrow \min
 \tag{8}$$

gdzie $\mathbf{P} = [P_1, P_2, \dots, P_N]$ to wektor nieznanymi parametrów, $T_i(\mathbf{P})$ - szacowane rozwiązanie równania (lub układu równań) w korcu i , Y_i - wynik pomiarów, N - liczba nieznanymi parametrów, I - liczba pomiarów.

3. Metoda numerycznego rozwiązania

Metoda wykorzystująca normę średniokwadratową wymaga rozwiązania równania (2) z warunkami (3-5) dla określonego wektora \mathbf{P} w kolejnym kroku iteracyjnym. Ze względu na nieliniowość równania parabolicznego (2) nie można rozwiązać go technikami dla parabolicznych równań liniowych, takimi jak np. metoda Cranka-Nicolson [10]. Równanie nieliniowe (2) można zapisać w postaci ogólnej:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \left(x, t, T(x, t), \frac{\partial T(x, t)}{\partial x}, \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \right) \quad (9)$$

Rozwiązanie równania (9) można uzyskać przez zastosowanie różnych technik. Na przykład w pracy [8] użyto metody elementów brzegowych (MEB). W prezentowanej pracy zostanie użyta metoda różnic skończonych oparta na metodzie Rungego-Kutty drugiego stopnia [11].

Tok postępowania w tej metodzie wygląda następująco:

1. Korzystając z warunku początkowego wyznaczyć T_i^j .
2. Wykorzystując zależności:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_i^j \approx \frac{T_{i+1}^j - T_{i-1}^j}{2\Delta x} \quad (10)$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_i^j \approx \frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{\Delta x^2} \quad (11)$$

wyznaczyć pochodne cząstkowe dla każdego i oraz j .

3. Obliczyć

$$K_i^j = K \left(x_i, t_i, T_i^j, \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_i^j, \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_i^j \right) \quad (12)$$

4. Wyznaczyć pierwsze przybliżenie T_i^{j+1} za pomocą równania

$$T_i^{j+1} \approx T_i^j + \Delta t \cdot K_i^j \quad (13)$$

5. Obliczyć

$$K_i^{j+1} = K \left(x_i, t_{i+1}, T_i^j, \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_i^{j+1}, \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_i^{j+1} \right) \quad (14)$$

6. Wyznaczyć wartość T_i^{j+1} z równania

$$T_i^{j+1} = T_i^j + \frac{\Delta t}{2} \cdot (K_i^{j+1} + K_i^j) \quad (15)$$

7. Powtarzać kroki 2 do 6 aż do ostatniego kroku czasowego j .

Kolejnym etapem jest minimalizacja normy (8). Istnieje wiele technik deterministycznych oraz niedeterministycznych, za pomocą których można rozwiązać to zagadnienie. Niektóre z nich zostały opisane w monografii [9]. W prezentowanej pracy zastosowano deterministyczną metodę Levenberga-Marquardta.

Algorytm rozwiązania problemu odwrotnego z wykorzystaniem metody różnic skończonych oraz metody Levenberga-Marquardta (LM), gdzie wektor $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_I)$ reprezentuje pomiary w określonych punktach czasu, wygląda następująco:

1. Rozwiązać równanie (2), korzystając ze wzorów (10-15) z użyciem wartości wektora \mathbf{P}^k (w pierwszym kroku przyjąć założoną wartość początkową), wyznaczając $\mathbf{T}(\mathbf{P}^k)$.
2. Wyznaczyć $S(\mathbf{P}^k) = [\mathbf{Y} - \mathbf{T}(\mathbf{P}^k)]^T [\mathbf{Y} - \mathbf{T}(\mathbf{P}^k)]$.
3. Wyznaczyć macierz wrażliwości \mathbf{J}^k oraz macierz Ω^k z zależności:

$$\mathbf{J}(\mathbf{P}^k) = \left[\frac{\partial \mathbf{T}^T(\mathbf{P}^k)}{\partial \mathbf{P}^k} \right]^T \quad (16)$$

$$\Omega^k = \text{diag} \left[(\mathbf{J}^k)^T \mathbf{J}^k \right] \quad (17)$$

4. Obliczyć nową wartość \mathbf{P}^{k+1} z wykorzystaniem (LM)

$$\mathbf{P}^{k+1} = \mathbf{P}^k + \left[(\mathbf{J}^k)^T \mathbf{J}^k + \mu^k \Omega^k \right]^{-1} [\mathbf{Y} - \mathbf{T}(\mathbf{P}^k)] \quad (18)$$

5. Wyznaczyć $\mathbf{T}(\mathbf{P})$ oraz $S(\mathbf{P})$ dla obliczonego wektora \mathbf{P}^{k+1} .
6. Jeżeli $S(\mathbf{P}^{k+1}) \geq S(\mathbf{P}^k)$, zastąpić μ^k przez $10 \cdot \mu^k$.
7. Jeżeli $S(\mathbf{P}^{k+1}) < S(\mathbf{P}^k)$, zastąpić μ^k przez $0.1 \cdot \mu^k$.

8. Sprawdzić warunek zatrzymania $|\mathbf{P}^{k+1} - \mathbf{P}^k| \leq \varepsilon$. Jeżeli warunek nie jest spełniony, wrócić do kroku 3.

W równaniu (18) został użyty parametr μ^k , który jest pewną dodatnią liczbą i nazywany jest parametrem tłumienia. Współczynniki wrażliwości w macierzy wrażliwości \mathbf{J}^k można wyznaczyć za pomocą metody bezpośredniej, polegającej na zastąpieniu pochodnej ilorazem różnicowym [8].

4. Przykład obliczeniowy

Analizie poddano ścianę betonową o następujących parametrach:

- gęstość: $\rho = 2300,0 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
- ciepło właściwe: $c_p = 1000,0 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$

W warunku brzegowym (3) przyjęto następujące wartości stałych współczynników:

- współczynnik przejmowania ciepła przez konwekcję: $\alpha_c = 25,0 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$,
- stała Stefana-Boltzmana: $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4}$,
- emisyjność: $\varepsilon_r = 0,9$.

Krzywą nagrzewania w warunku (3) przyjęto jako krzywą standardową daną równaniem (6).

Jako cel zadania odwrotnego postawiono zidentyfikowanie przewodności cieplnej danej równaniem (7), w którym poszukiwanymi parametrami są k_0 oraz k_1 . Do rozwiązania zadania użyto autorskiego programu napisanego w języku C++.

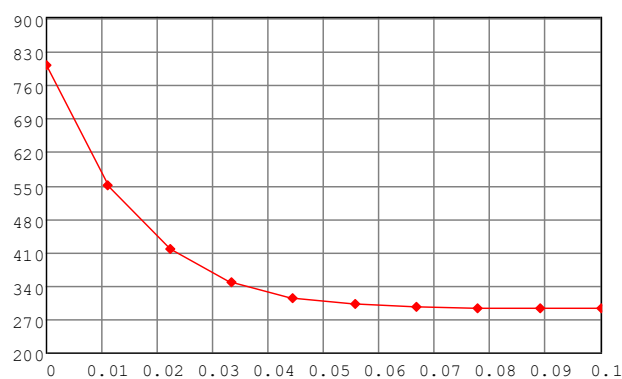
Przegrodę zamodelowano jako jednowymiarową o grubości 100 mm. Obszar zdyskretyzowano na 9 odcinków (10 węzłów). Całkowity czas nagrzewania wynoszący 10 minut podzielono na 30 kroków z 20-sekundowym przyrostem. W kryterium zatrzymania przyjęto $\varepsilon = 10^{-10}$. Początkową wartość parametru tłumienia przyjęto $\mu^0 = 18$.

Początkowo zidentyfikowano parametry k_0 oraz k_1 dla niezaburzonego wektora \mathbf{Y} . Na rysunkach 5-8 oraz w tabeli 1 przedstawiono wyniki analizy.

W drugiej części zadania wprowadzono losowe zaburzenie wektora \mathbf{Y} symulujące błędy pomiarowe zgodnie z równaniem:

$$Y_i = T_i^{exact} + T_i^{exact} \cdot V_i \quad (19)$$

gdzie V_i jest zmienną losową o rozkładzie normalnym $\Phi(m, Stdev)$ z wartością oczekiwaną $m = 0$ i odchyleniem standardowym $Stdev = 0,01$. Wyniki analizy przedstawiono na rysunkach 9-12 oraz w tabeli 2.

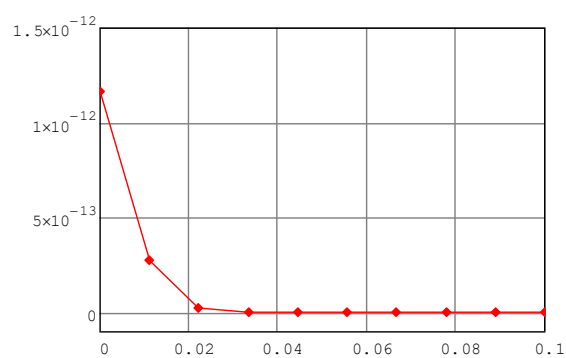


Rys. 5. Rozkład temperatury [K] w funkcji grubości [m] ściany po 10 minutach nagrzewania

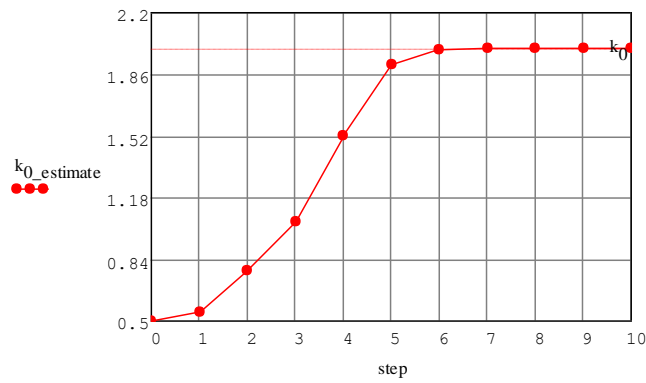
TABELA 1

Wartości identyfikowanych parametrów w kolejnych krokach iteracyjnych

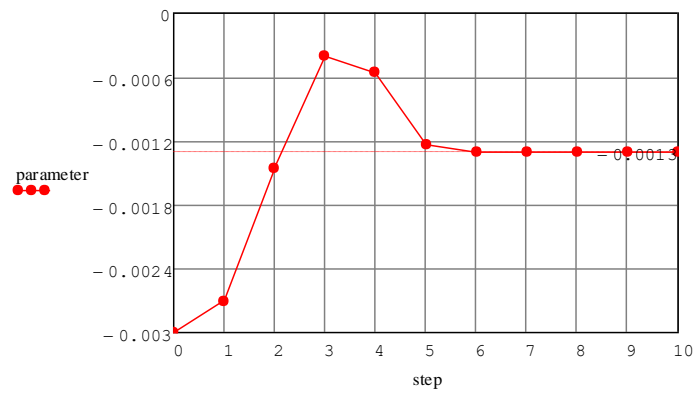
Krok	Param.1	Param.2
1	0,5000000000	-0,0030000000
2	0,5473874900	-0,0027135103
3	0,7774877130	-0,0014567710
4	1,0471333327	-0,0004054369
5	1,5178450428	-0,0005555902
6	1,9123131042	-0,0012348817
7	1,9969418200	-0,0012988670
8	1,9999875938	-0,0012999851
9	1,9999999013	-0,0012999998
10	1,9999999989	-0,0013000000
11	2,0000000000	-0,0013000000



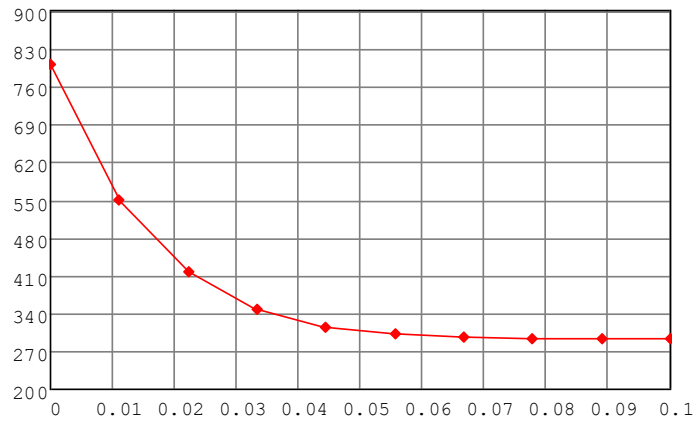
Rys. 6. Błąd względny temperatury w ostatnim kroku czasowym dla odzyskanych parametrów



Rys. 7. Proces iteracyjny parametru k_0



Rys. 8. Proces iteracyjny parametru k_1

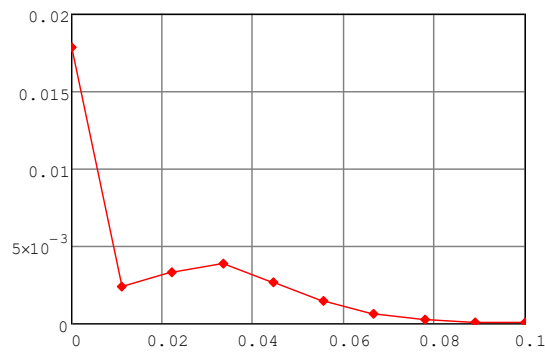


Rys. 9. Rozkład temperatury [K] w funkcji grubości [m] ściany po 10 minutach nagrzewania

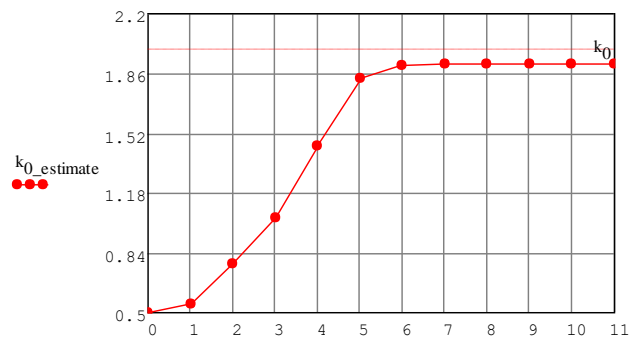
TABELA 2

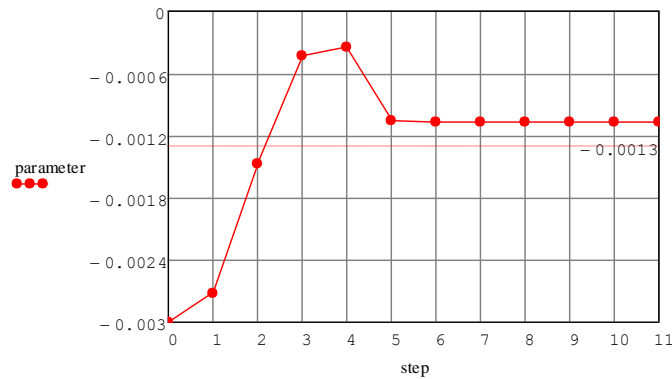
Wartości identyfikowanych parametrów w kolejnych krokach iteracyjnych

Krok	k_0	k_1
1	0,5000000000	-0,0030000000
2	0,5469920347	-0,0027158554
3	0,7750994505	-0,0014685925
4	1,0404657951	-0,0004286664
5	1,4451094861	-0,0003466388
6	1,8340574170	-0,0010538088
7	1,9083665228	-0,0010688387
8	1,9131820952	-0,0010698087
9	1,9132316645	-0,0010696889
10	1,9132323008	-0,0010696930
11	1,9132322966	-0,0010696928



Rys. 10. Błąd względny temperatury w ostatnim kroku czasowym dla odzyskanych parametrów

Rys. 11. Proces iteracyjny parametru k_0

Rys. 12. Proces iteracyjny parametru k_1

Wnioski

W niniejszej pracy przedstawiono metodę identyfikacji parametrów przegrody betonowej narażonej na obciążenie wysoką temperaturą. Obliczenia wykonano w dwóch wariantach. W pierwszym wektor zmierzonych wartości przyjęto jako niezaburzony (nieobarczony błędami pomiarowymi). W drugim wariantcie wprowadzono losowe zaburzenie przez wykorzystanie generatora liczb pseudolosowych (wektor losowy o rozkładzie normalnym). Dla pierwszego wariantu po 10 iteracjach otrzymano wartości parametrów zgodne z założonymi. W drugim wariantcie po 11 iteracjach otrzymano rozbieżność w stosunku do założonych parametrów. W przypadku k_0 błąd względny wyniósł 4,535%, a w przypadku k_1 17,716%, podczas gdy zaburzenie wektora wartości pomierzonych nie przekroczyło 3%.

Na podstawie ww. obliczeń można stwierdzić, że parametry w funkcji przewodności cieplnej przyjmowane w wykładniku potęgi są wrażliwe na małe zmiany temperatury pomierzonej. Stosunkowo niewielka zmiana parametru k_0 sugeruje zasadność przyjmowania do analizy funkcji wielomianowej, w której identyfikowane są współczynniki wielomianu o mniejszej wrażliwości na zmiany. Niewielka liczba iteracji wykazała bardzo dużą skuteczność metody Levenberga-Marquardta. Rekonstrukcja parametrów została wykonana na podstawie temperatur pomierzonych tylko na powierzchniach zewnętrznych przegrody w 20-sekundowych odstępach, co w przypadku badań na rzeczywistym obiekcie umożliwiłoby identyfikację właściwości fizycznych bezinwazyjnie.

Literatura

- [1] Poński M., Paluszyński J., Dubała K., Modele przepływu ciepła w ciałach stałych, ZN Politechniki Częstochowskiej 2013 nr 169, Budownictwo 19, 129-134.
- [2] Taler J., Duda P., Solving Direct and Inverse Heat Conduction Problems, Springer, Berlin 2006.
- [3] PN-EN 1991-1-2 Eurokod 1: Oddziaływania na konstrukcje - Część 1-2: Oddziaływania ogólne - Oddziaływania na konstrukcję w warunkach pożaru.

-
- [4] PN-EN 1992-1-2 Eurokod 2: Projektowanie konstrukcji z betonu - Część 1-2: Reguły ogólne - Projektowanie z uwagi na warunki pożarowe.
 - [5] Aster R., Borchers B., Thurber C., Parameter Estimation and Inverse Problems, Second Edition, Elsevier Academic Press, USA 2012.
 - [6] Alifanov O.M., Inverse Heat Transfer Problems, Springer-Verlag, Berlin 1994.
 - [7] Wawrzynek A., Odwrotne zagadnienia przewodzenia ciepła z dużą liczbą danych pomiarowych, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2005.
 - [8] Szopa R., Analiza wrażliwości i zadania odwrotne w termodynamice procesów odlewniczych, Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa 2006.
 - [9] Özişik N.M., Orlande H.R.B., Inverse Heat Transfer: Fundamentals and Applications, Taylor & Francis, New York 2000.
 - [10] Crank J., The Mathematics of Diffusion, Clarendon Press, Oxford 1975.
 - [11] Baker D.L., A second-order diagonally implicit Runge-Kutta time-stepping method, Ground Water 1993, 31, 890-895.

Streszczenie

W pracy przedstawiono rozwiązanie zagadnienia odwrotnego dla nieliniowego parabolicznego równania przewodzenia ciepła z nieliniowym warunkiem brzegowym, modelującego warunki pożaru dla przegrody jednowarstwowej.

One-layer wall parameters identification under fire load - computational algorithm

Abstract

In the paper model of one-layer wall on fire load was shown. Solution of inverse problem for nonlinear parabolic heat conduction equation with nonlinear boundary condition was described.