

Л.И. Высоцкий

## ЗОНЫ С ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ВИХРЕВОЙ ВЯЗКОСТЬЮ В ПРОДОЛЬНО-ОДНОРОДНЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОТОКАХ

С давних времен модели продольно-однородных турбулентных потоков подробно анализировались не только ввиду их широкого распространения в технике, но и в связи с относительной простотой применения к ним различных гипотез и теоретических построений. Указанные модели служат как бы оселком для оттачивания и совершенствования методов анализа и построения расчетных схем для повышения точности получения технических результатов.

Со времени опытов А. Фейджа и Х. Тауненда [9], В.Б. Гуссака [1], Е.М. Хабахпашевой [6], М.В. Загаролы [12] и др. стало ясно, что предложенная Л. Прандтлем двухслойная модель продольно-однородного турбулентного потока, сыгравшая огромную роль в развитии теории турбулентности, на самом деле не имеет места. Высокоточными опытами было доказано, что ламинарный пограничный слой в этих течениях отсутствует, а турбулентные пульсации проникают вплоть до твердых стенок. Наиболее емко это положение сформулировано в [2]: «... в настоящее время термин «ламинарный подслой» представляется мало удачным».

Существенную роль в анализе турбулентных течений сыграло составление системы уравнений баланса турбулентной энергии, согласно которой поддержание турбулентных движений происходит за счет отбора части энергии от осреднённого движения. Ответственными за это в уравнениях являются, как известно, члены типа  $-\overline{\rho u'_i u'_j}$ ,  $\frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_j}$ , причем при положительном их значении энергия заимствуется у осредненного течения, а при отрицательном, - возвращается осредненному течению. Большую роль в развитии этой проблемы сыграло предложение Ж. Буссинеска [7], который выразил вторые одноточечные моменты -  $-\overline{u'_i u'_j}$  через турбулентный кинематический коэффициент вязкости (вихревую вязкость). В общем

случае, как полагают, этот коэффициент должен выражаться тензором четвертого ранга, что находится в стадии обсуждения. Однако, оставляя общий случай в стороне и возвращаясь к рассматриваемому продольно-однородному турбулентному течению, заметим, что предложенное Ж. Буссинеском выражение

$$-\overline{u_i' u_j'} = \nu_\tau \frac{d\overline{u_x}}{dy} \quad (1)$$

безупречно, так как в нем одна неизвестная величина ( $-\overline{u_i' u_j'}$ ) просто выражается через другую неизвестную величину ( $\nu_\tau$ ). Значение  $\nu_\tau$  предлагается находить экспериментально с использованием формулы (1)

$$\nu_\tau = -\frac{\overline{u_i' u_j'}}{\frac{d\overline{u_x}}{dy}} \quad (2)$$

По поводу выражения (1) в [2] высказано мнение, что «собственно говоря, само по себе соотношение (1) даже не является предложением и не устанавливает новой связи, оно только заменяет неизвестное новым неизвестным».

Из изложенного следует, что случай, когда  $\nu_\tau > 0$ , соответствует переходу кинетической энергии от осреднённого движения к турбулентному, а при  $\nu_\tau < 0$ , наоборот, о возвращении её от турбулентного движения осредненному.

В этой связи имеются два основных мнения. Первое заключается в том, что в продольно-однородных турбулентных потоках кинематический коэффициент турбулентной вязкости (далее, вихревой вязкости) может быть лишь существенно *положительной* величиной. Возможность появления отрицательной вихревой вязкости связывается с экзотическими течениями типа турбулентных туманностей [4], протуберанцами, течением Гольфстрим и т.д. В [2] вихревой вязкости присваивается положительное значение на том основании, что «при течении несжимаемой жидкости в трубах, каналах пограничных слоях, где прямые измерения величин  $-\rho \overline{u_i' u_j'}$ ,  $\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}$ , показывают даже, что величина  $-\rho \overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}$  здесь всегда оказывается положительной во всех точках турбулентного потока (в согласии с полуэмпирическими формулами 5.8)».

Второе мнение, о возможности существования условия  $\nu_\tau < 0$ , высказывалось Ф. Форхгеймером [5], Н.А. Слезкиным [3] и др. Например Ф. Форхгеймер полагал, что «осредненное течение может превращаться не

только в тепло, но и в вихри; пожалуй, и наоборот, благодаря уменьшению вихрей может появиться ускорение осредненного движения; однако относительно этого опытных данных нет».

Есть основания полагать, что мнение, высказанное в [2] оказалось, к сожалению, решающее влияние на его широкое внедрение в соответствующие представления многих исследователей.

Попытаемся, однако, доказать, что это утверждение было высказано без анализа упомянутых эмпирических формул.

Исходим из того, что осредненные продольно-однородные течения подчиняются закону

$$\frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{u_*^2}{\nu + \nu_\tau} \left(1 - \frac{y}{L}\right) \quad (3)$$

где:  $\bar{u}$  - осредненная скорость;

$y$  - расстояние по нормали от твердой стенки;

$L$  - характерная длина (радиус трубы  $r_0$  или глубина плоского потока  $H$ ).

Ясно, что градиент скорости при  $y = 0$ , то есть на твердой стенке, равен

$$\left. \frac{d\bar{u}}{dy} \right|_{y=0} = \frac{u_*^2}{\nu} \quad (4)$$

Если предположить, как это сделано в [2], что  $\nu_\tau$  является существенно положительной величиной, то отсюда следует, что ни в одной другой точке  $y > 0$  значение градиента скорости не может превзойти величину  $\frac{u_*^2}{\nu}$ . Этот критерий является надежным средством для проверки любых формул для распределения осредненных скоростей на учет ими зон с отрицательной вихревой вязкостью, либо полное их игнорирование. Очевидным признаком в пристенной зоне, то есть при малых значениях  $y$ , наличия зоны с отрицательной турбулентной вязкостью является строгое условие

$$\frac{d\bar{u}}{dy} > \frac{u_*^2}{\nu} \quad (5)$$

Ограничимся рассмотрением, в качестве примера, одной из известных моделей продольно-однородного потока - трехслойной моделью Т. Кармана [10]. Согласно этой модели осредненные скорости распределены в толще потока по законам:

- при  $0 \leq y \leq 5 \frac{\nu}{u_*}$   $\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{u_*}{\nu} y$  или  $u^+ = y^+$ ; (6а)

- при  $5 \frac{\nu}{u_*} < y \leq 30 \frac{\nu}{u_*}$   $\frac{\bar{u}}{u_*} = 5 \ln \frac{u_* y}{5\nu} - 3,05$  или  $u^+ = 5 \ln \frac{y^+}{5} - 3,05$ ; (6б)

$$- \text{ при } y > 30 \frac{v}{u_*} \frac{\bar{u}}{u_*} = 2,5 \ln \frac{u_* y}{v} + 5,5 \text{ или } u^+ = 2,5 \ln y^+ + 5,5 \quad (6в)$$

Из (3) легко получить выражение (с переходом к безразмерным координатам)

$$\frac{v}{v_\tau} = \frac{1}{\frac{du^+}{dy^+}} \left(1 - \frac{y}{L}\right) - 1 \quad (7)$$

где  $u^+ = \frac{\bar{u}}{u_*}$ ;  $y^+ = \frac{u_* y}{v}$ .

Для первой зоны получим  $\frac{du^+}{dy^+} = 1$ . Тогда

$$\frac{v}{v_\tau} = \frac{1}{1} \left(1 - \frac{y}{L}\right) - 1 = -\frac{y}{L} < 0 \quad (8)$$

То есть в данной зоне вихревая вязкость *отрицательна*.

Рассмотрим вторую зону. Здесь  $\frac{du^+}{dy^+} = \frac{5}{y^+}$ . Следовательно

$$\frac{v}{v_\tau} = \frac{y^+}{5} \left(1 - \frac{y}{L}\right) - 1 \quad (9)$$

Граничное значение  $y^+$  для этой зоны равно 5. Тогда получим

$$\frac{v}{v_\tau} = \frac{5}{5} \left(1 - \frac{y}{L}\right) - 1 = -\frac{y}{L} < 0.$$

Следовательно, и в некоторой части буферной зоны в модели Т. Кармана имеется слой с *отрицательной* вихревой вязкостью. Легко получить значение  $y_{\text{пред}}$ , ограничивающее слой с отрицательной турбулентной вязкостью в буферной зоне

$$y_{\text{пред}} = \frac{L}{2} - \sqrt{\frac{L^2}{u} - \frac{5Lv}{u_*}} \quad (10)$$

Полуэмпирические формулы многократно подвергались корректировке введением различных поправок (Коулза, Ротта и др.). На примере наиболее известной поправки Коулза [8], называемой «законом следа» легко показать, что если она и исправляет ту или иную формулу, то в сторону увеличения толщин слоя с отрицательной вихревой вязкостью. На самом деле, закон распределения осредненных скоростей с поправкой Коулза имеет вид той или иной формулы (например, приведенный выше набор формул Т. Кармана, умноженный на существенно положительный множитель, изменяющий свою

величину от 1 до 2 по синусоидальному закону). То есть осредненные скорости в пределах пограничного слоя несколько увеличиваются, что усугубляет изложенное.

Эпюра распределения осредненных скоростей в продольно-однородных потоках при условии  $\nu_T > 0$  схематично представлена на рисунке 1. На нем требования, выражаемые соотношениями (3) и (4), сводятся к наличию луча, проведенного из начала координат под углом  $\theta = \arctg \frac{d\bar{u}}{dy}$ , который имеет лишь одну общую точку с эпюрой в начале координат ( $y = 0, \bar{u} = 0$ ), то есть сама эпюра скоростей нигде этот луч не пересекает. В случае, когда вблизи стенки возникает слой, в котором  $\nu_T < 0$ , эпюра скоростей смещается вправо и тот же луч пересекает её в точке, отстоящей от твердой стенки на некотором малом расстоянии (рис. 2).

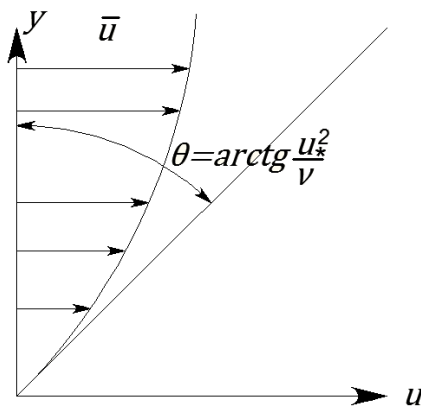


Рис. 1. Схема эпюры скоростей при  $\nu_T > 0$

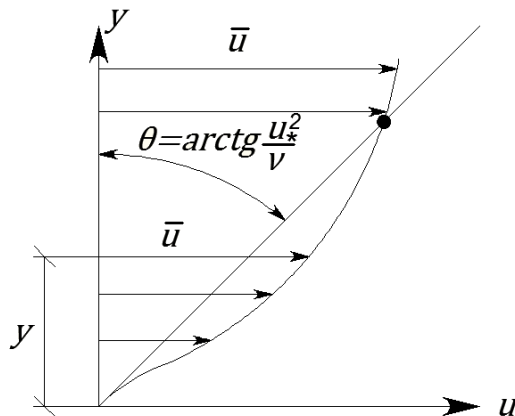


Рис. 2. Схема эпюры скоростей при  $\nu_T < 0$

По эпюре осредненных скоростей легко установить наличие условия  $\nu_T < 0$ . Как следует из рис. 2 ему соответствует соотношение

$$\bar{u} > \frac{u_*^2}{\nu} y. \quad (11)$$

В безразмерных координатах  $u^+, y^+$  те же графики будут иметь вид (рис. 3, 4).

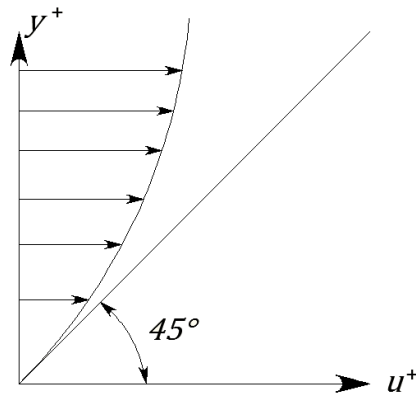


Рис. 3. Схема эпюры скоростей при  $\nu_T > 0$

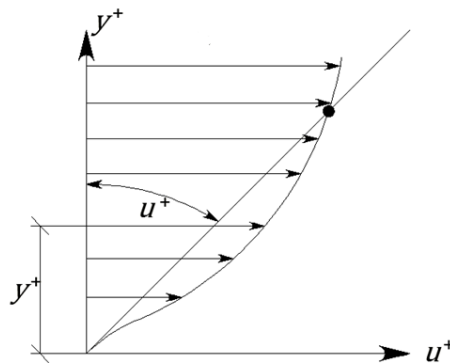


Рис. 4. Схема эпюры скоростей при  $\nu_T < 0$

В безразмерной системе координат признак выполнения условия  $\nu_T < 0$  сводится к наличию зоны с соотношением  $u^+ > y^+$ .

При представлении опытных данных в табличной форме соотношения  $u^+ \geq y^+$  легко фиксируются и, следовательно, с помощью таких таблиц легко обнаружить зоны с отрицательной вихревой вязкостью. В качестве примера приведем данные недавно опубликованных результатов высокоточных экспериментов М.В. Загаролы [12] и Ж.М. Остерлунда (таб. 1).

ТАБЛИЦА 1

**Результаты опытных данных по распределению осредненных скоростей в круглой трубе М.В. Загорола [12] и погранслое Ж.М. Остерлунда [11]**

Re	Автор	$y^+$	$u^+$	$u^+ \geq y^+$	Значение $V_T$
31577	Загорола (круглая труба)	5,933	6,832	>	Отрицательное
		6,521	7,220	>	
		7,243	7,797	>	
		8,072	8,378	>	
41727	Загорола (круглая труба)	7,604	8,238	>	Отрицательное
		8,358	8,764	>	
		9,283	9,422	>	
23119	Остерлунд (погранслоем на пластине)	5,562	5,633	>	Отрицательное
22845	Остерлунд (погранслоем на пластине)	4,100	4,329	>	Отрицательное
21099	Остерлунд (погранслоем на пластине)	5,224	5,327	>	Отрицательное
20258	Остерлунд (погранслоем на пластине)	4,305	4,609	>	Отрицательное
		5,757	5,769	>	
18480	Остерлунд (погранслоем на пластине)	4,628	4,895	>	Отрицательное
17901	Остерлунд (погранслоем на пластине)	4,096	4,185	>	Отрицательное
16422	Остерлунд (погранслоем на пластине)	4,022	4,290	>	Отрицательное
14207	Остерлунд (погранслоем на пластине)	4,922	4,933	>	Отрицательное
8209	Остерлунд (погранслоем на пластине)	4,686	4,712	>	Отрицательное
6699	Остерлунд (погранслоем на пластине)	4,999	5,127	>	Отрицательное
3654	Остерлунд (погранслоем на пластине)	4,198	4,381	>	Отрицательное
4312	Остерлунд (погранслоем на пластине)	4,017	4,103	>	Отрицательное
17279	Остерлунд (погранслоем на пластине)	4,113	4,404	>	Отрицательное

Простой анализ приведенных данных позволяет установить, во-первых, что измерить скорость на расстояниях  $y^+ < 4$  исследователям не удалось, и, во-вторых, в ближайших к твердой поверхности точках на расстояниях  $y^+ = 4 \div 5$ , а иногда  $y^+ = 7 \div 9$ , устойчиво наблюдается удовлетворение условия (11).

## Выводы

1. Получается, что пока ведутся споры о существовании отрицательной вихревой вязкости, в проектной практике во всём мире многочисленные расчёты на протяжении почти столетия ведутся с её учётом.
2. Существующие до сих пор модели строения осреднённых продольно-однородных потоков не включают в состав предлагаемых зон слой с отрицательной вихревой вязкостью, то есть слой, в котором кинетическая энергия турбулентности возвращается от турбулентного движения к осредненному.
3. Анализ полуэмпирических формул для распределения осредненных скоростей, широко используемых в технических расчетах, показал, что они де факто учитывают этот феномен.
4. Появившиеся в последнее время результаты высокоточных измерений распределения осредненных скоростей в трубах и погранслое на плоской пластине напрямую свидетельствует в пользу существования слоя с отрицательной вязкостью, что является прямым подтверждением этого феномена.
5. Существующее положение следует исправить внесением в состав слоев, на которые условно делится пристенная зона, тонкого пристенного слоя с течением при наличии отрицательной вихревой вязкости (то есть с контргradientным течением).
6. Выполнение пункта 5 послужит совершенствованию формул для расчета распределения осредненных скоростей.

## Литература

- [1] Гуссак В.Б., Некоторые наблюдения над эрозией почв в пограничном слое с помощью микрокиносъемки, Почвоведение 1948, 7, 453-457.
- [2] Монин А.М., Статическая гидромеханика, Наука, М.: 1965, Ч. 1, 640 с.; 1967, Ч. 2. 720 с.
- [3] Слезкин Н.А., Динамика вязкой жидкости, Гостехиздат, М.: 1955, 512 с.
- [4] Старр В., Физика явлений с отрицательной вязкостью, Мир, М.: 1971, 262 с.
- [5] Journal of Fluid Mechanics 1974, Vol. 65, Part 3, 439-459.
- [6] Форхгеймер Ф., Гидравлика, Л.: ОНТИ, М.: 1935, 616 с.
- [7] Хабахпашева Е.М., Некоторые данные о структуре течения в вязком подслое, Е.М. Хабахпашева, Проблемы теплофизики и физической гидродинамики, Изд-во СО АН СССР, Новосибирск 1974, 223-235.
- [8] Hanjalic K., 1968 Fully-developed flow in rectangular ducts of nonuniform surface texture. Part I. An experimental investigation, K. Hanjalic, B.E. Launder, Imperial College. Dept. of Mech. Engng. TWF/TN/48.
- [9] Coles D., The low of the wake in turbulent boundary layer, Journal of Fluid Mechanics 1956, 1, 3, 191-226.
- [10] Fage A., Townend H., Proceedings of the Royal Society, London 1932, 135, Ser. A, 656 p.aaa.



- [11] Karman T.Y., Mechanical similarity and turbulence (in German), T.Y. Karman, Nachrichten von der Gesellschaften der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch physikalische Klasse, 1930, P. 56-76.aaa.
- [12] Osterlund J. Stockholm, 1999. <http://www.mech.kth.se/~jens/zpg/aaa>.
- [13] Zagarola M.V. <http://www.orinceton.edu/~gasdvn/>

## **Strefy z ujemną lepkością w podłużno-jednolitych turbulentnych przepływach**

### **Streszczenie**

W artykule przedstawiono analizę teoretyczną modeli podłużno-jednolitych turbulentnych przepływów w celu udoskonalenia obliczanych schematów i zwiększenia dokładności wyników technicznych. Na podstawie dokonanych obliczeń ustalono, że w istniejących modelach struktury podłużno-jednolitych turbulentnych przepływów nie bierze się pod uwagę warstwy, w której energia kinetyczna turbulencji zmienia się z ruchu turbulentnego do średniego. Zaproponowano wprowadzenie cienkiej warstwy z przepływem przy istnieniu ujemnej lepkości.

## **Zones of negative viscosity spun oblong-uniform turbulent flows**

### **Abstract**

This article presents a theoretical analysis of oblong-uniform turbulent flow models in order to improve the calculated patterns and increase the accuracy of technical results. Based on the calculations it was found that the existing models of the structure of oblong-uniform flow do not take into account the layer where the kinetic energy turbulence changes from turbulent flow to medium. It is proposed to place a thin layer with flow, to create the existence of a negative spun viscosity.