

Krzysztof Kubicki

## DRGANIA WŁASNE UKŁADÓW RAMOWYCH I ICH MODELOWANIE W PROGRAMIE AUTODESK ROBOT STRUCTURAL ANALYSIS

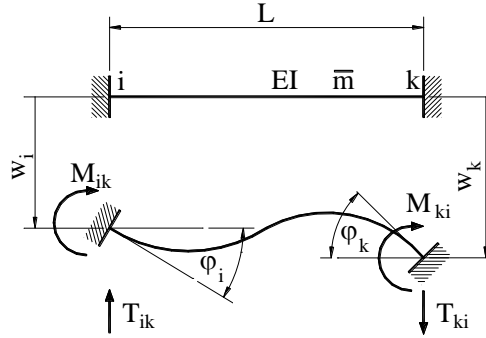
### Wprowadzenie

Programy do obliczeń konstrukcji ułatwiają życie projektantom, znacznie skracając czas obliczeń, odciążając od żmudnych prac, a czasem wręcz umożliwiając analizę złożonych konstrukcji. Na rynku jest dostępnych wiele programów do analizy numerycznej konstrukcji. Można za ich pomocą zamodelować konstrukcję, przeprowadzić jej analizę (statyczną, wyboczeniową czy dynamiczną), a także zwymiarować jej elementy. Nie powinno się jednak bezkrytycznie podchodzić do wyników obliczeń. Każdorazowo należy je weryfikować innymi metodami. Na przykładzie analizy modalnej przeprowadzonej w programie *Autodesk Robot Structural Analysis Professional* (zwanym dalej programem *Robot*) [1] wskazano na pewne zagrożenia związane ze sposobem modelowania konstrukcji. Przeprowadzono obliczenia analityczne dla prostego układu ramowego z masą rozłożoną w sposób ciągły. Uzyskane wartości częstości drgań własnych posłużyły jako wielkości odniesienia dla wartości otrzymanych z analizy modalnej przeprowadzonej w programie *Robot*.

### 1. Równania kanoniczne metody przemieszczeń

Do obliczenia częstości drgań własnych układów belkowych czy ramowych o masie  $\bar{m}$  rozłożonej w sposób ciągły można wykorzystać metodę przemieszczeń. Przyjmuje się zasadę zeszczywnienia i zazwyczaj pomija wpływ sił normalnych na przemieszczenia, co nieco upraszcza rozwiązanie. Poniżej przedstawiono wzory transformacyjne dla prętów o schematach wykorzystanych do rozwiązania przykładowego zadania. Jako dodatnie przyjęto przedstawione na rysunkach 1 i 2 kierunki amplitud sił brzegowych i amplitud przemieszczeń w przekrojach końcowych pręta.

**Wzory transformacyjne dla pręta obustronnie utwierdzonego**



Rys. 1. Schemat pręta obustronnie utwierdzonego

$$M_{ik} = \frac{EI}{L} \left( \alpha(\lambda) \cdot \varphi_i + \beta(\lambda) \cdot \varphi_k + \vartheta(\lambda) \cdot \frac{w_i}{L} - \delta(\lambda) \cdot \frac{w_k}{L} \right)$$

$$M_{ki} = \frac{EI}{L} \left( \beta(\lambda) \cdot \varphi_i + \alpha(\lambda) \cdot \varphi_k + \delta(\lambda) \cdot \frac{w_i}{L} - \vartheta(\lambda) \cdot \frac{w_k}{L} \right)$$

$$T_{ik} = -\frac{EI}{L^2} \left( \vartheta(\lambda) \cdot \varphi_i + \delta(\lambda) \cdot \varphi_k + \gamma(\lambda) \cdot \frac{w_i}{L} - \varepsilon(\lambda) \cdot \frac{w_k}{L} \right)$$

$$T_{ki} = -\frac{EI}{L^2} \left( \delta(\lambda) \cdot \varphi_i + \vartheta(\lambda) \cdot \varphi_k + \varepsilon(\lambda) \cdot \frac{w_i}{L} - \gamma(\lambda) \cdot \frac{w_k}{L} \right)$$

gdzie  $\alpha(\lambda) = \lambda \frac{\cosh(\lambda) \cdot \sin(\lambda) - \sinh(\lambda) \cdot \cos(\lambda)}{1 - \cosh(\lambda) \cdot \cos(\lambda)}$

$$\beta(\lambda) = \lambda \frac{\sinh(\lambda) - \sin(\lambda)}{1 - \cosh(\lambda) \cdot \cos(\lambda)}$$

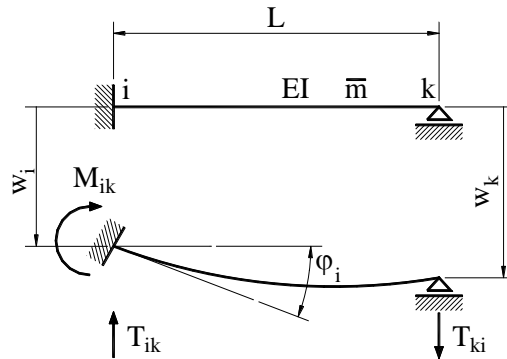
$$\vartheta(\lambda) = \lambda^2 \frac{\sinh(\lambda) \cdot \sin(\lambda)}{1 - \cosh(\lambda) \cdot \cos(\lambda)}$$

$$\delta(\lambda) = \lambda^2 \frac{\cosh(\lambda) - \cos(\lambda)}{1 - \cosh(\lambda) \cdot \cos(\lambda)}$$

$$\gamma(\lambda) = \lambda^3 \frac{\cosh(\lambda) \cdot \sin(\lambda) + \sinh(\lambda) \cdot \cos(\lambda)}{1 - \cosh(\lambda) \cdot \cos(\lambda)}$$

$$\varepsilon(\lambda) = \lambda^3 \frac{\sinh(\lambda) + \sin(\lambda)}{1 - \cosh(\lambda) \cdot \cos(\lambda)}$$

### Wzory transformacyjne dla pręta utwierdzonego w węźle „i” oraz podpartego przegubowo w węźle „k”



Rys. 2. Schemat pręta utwierdzonego z jednej strony i podpartego przegubowo z drugiej

$$M_{ik} = \frac{EI}{L} \left( \alpha'(\lambda) \cdot \varphi_i + \vartheta'(\lambda) \cdot \frac{w_i}{L} - \delta'(\lambda) \cdot \frac{w_k}{L} \right)$$

$$T_{ik} = -\frac{EI}{L^2} \left( \vartheta'(\lambda) \cdot \varphi_i + \gamma'(\lambda) \cdot \frac{w_i}{L} - \varepsilon'(\lambda) \cdot \frac{w_k}{L} \right)$$

$$T_{ki} = -\frac{EI}{L^2} \left( \delta'(\lambda) \cdot \varphi_i + \varepsilon'(\lambda) \cdot \frac{w_i}{L} - \chi'(\lambda) \cdot \frac{w_k}{L} \right)$$

gdzie  $\alpha'(\lambda) = \lambda \frac{2 \cdot \sinh(\lambda) \cdot \sin(\lambda)}{\cosh(\lambda) \cdot \sin(\lambda) - \sinh(\lambda) \cdot \cos(\lambda)}$

$$\vartheta'(\lambda) = \lambda^2 \frac{\cosh(\lambda) \cdot \sin(\lambda) + \sinh(\lambda) \cdot \cos(\lambda)}{\cosh(\lambda) \cdot \sin(\lambda) - \sinh(\lambda) \cdot \cos(\lambda)}$$

$$\delta'(\lambda) = \lambda^2 \frac{\sinh(\lambda) + \sin(\lambda)}{\cosh(\lambda) \cdot \sin(\lambda) - \sinh(\lambda) \cdot \cos(\lambda)}$$

$$\gamma'(\lambda) = \lambda^3 \frac{2 \cdot \cosh(\lambda) \cdot \cos(\lambda)}{\cosh(\lambda) \cdot \sin(\lambda) - \sinh(\lambda) \cdot \cos(\lambda)}$$

$$\varepsilon'(\lambda) = \lambda^3 \frac{\cosh(\lambda) + \cos(\lambda)}{\cosh(\lambda) \cdot \sin(\lambda) - \sinh(\lambda) \cdot \cos(\lambda)}$$

$$\chi'(\lambda) = \lambda^3 \frac{1 + \cosh(\lambda) \cdot \cos(\lambda)}{\cosh(\lambda) \cdot \sin(\lambda) - \sinh(\lambda) \cdot \cos(\lambda)}$$

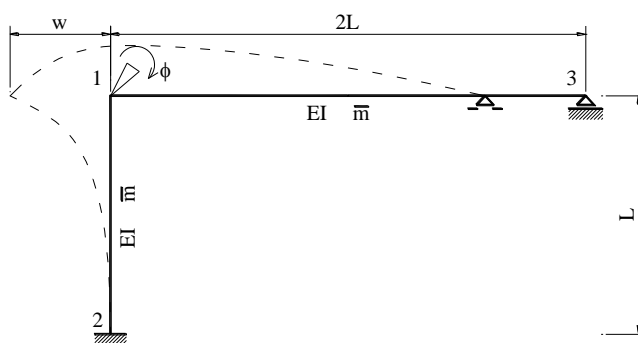
Parametr  $\lambda$  definiuje się w postaci

$$\lambda = L \sqrt[4]{\frac{m \omega^2}{EI}}$$

W odróżnieniu od zadań statyki dla zagadnienia własnego istnieją wzory transformacyjne dla pręta dwuprzegubowego i jednostronnie utwierdzonego (wspornik). Można je znaleźć w literaturze, np. [2, 3]. Nie będą one wykorzystywane przy rozwiązywaniu zadania, dlatego zostały pominięte.

## 2. Rozwiązanie analityczne

Przykładowe zadanie polega na określeniu podstawowych częstości drgań własnych  $\omega$  ramy przesuwnej przedstawionej na rysunku 3, wykonanej z dwuteownika IPE300.



Rys. 3. Schemat ramy

Dane wejściowe:

$$L = 4 \text{ m} \quad \bar{m} = 42,23 \frac{\text{kg}}{\text{m}} \quad E = 205 \text{ GPa} \quad I = 8360 \text{ cm}^4$$

Równania równowagi:

$$\begin{cases} M_{12} + M_{13} = 0 \\ -T_{12} - B = 0 \end{cases}$$

Siłę bezwładności  $B$  związaną z masą rygla (pręt 1-3)  $M = \bar{m} \cdot 2L$  wyznaczono z zależności

$$B = -M \frac{d^2 w}{dt^2}$$

Dla drgań harmoniczych zachodzi związek

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = -\omega^2 w$$

Z przekształcenia zależności na parametr  $\lambda$  jest

$$\omega^2 = \frac{\lambda^4 EI}{L^4 m}$$

Zatem

$$B = m \cdot 2L \frac{\lambda^4 EI}{L^4 m} w = \frac{EI}{L} 2\lambda^4 \frac{w}{L^2}$$

Pozostałe składowe wyznaczono z wzorów transformacyjnych

$$M_{12} = \frac{EI}{L} \left( \alpha(\lambda) \cdot \varphi + \vartheta(\lambda) \cdot \frac{w}{L} \right)$$

$$M_{13} = \frac{EI}{2L} \alpha'(2\lambda) \cdot \varphi$$

$$T_{12} = -\frac{EI}{L^2} \left( \vartheta(\lambda) \cdot \varphi + \gamma(\lambda) \cdot \frac{w}{L} \right)$$

Równania równowagi tworzą jednorodny układ równań, który ma nieskończenie wiele rozwiązań. Aby znaleźć nietrywialne rozwiązanie, należy główny wyznacznik tego układu przyrównać do zera. Podstawiając składowe do równań równowagi i porządkując je, otrzymuje się wyznacznik

$$\begin{vmatrix} \alpha(\lambda) + \frac{1}{2} \alpha'(2\lambda) & \frac{\vartheta(\lambda)}{L} \\ \frac{\vartheta(\lambda)}{L} & \frac{\gamma(\lambda) - 2\lambda^4}{L^2} \end{vmatrix} = 0$$

Po rozwinięciu wyznacznika otrzymujemy równanie przestępne

$$[-2 \cdot \alpha(\lambda) - \alpha'(2\lambda)] \cdot \lambda^4 + \alpha(\lambda) \cdot \gamma(\lambda) + \frac{1}{2} \alpha'(2\lambda) \cdot \gamma(\lambda) - [\vartheta(\lambda)]^2 = 0,$$

którego 5 pierwszych pierwiastków zamieszczono w tabeli 1.

TABELA 1

**Pierwiastki równania przestępnego**

i	1	2	3	4	5
$\lambda_i$	1,21683	1,84433	3,28063	4,33669	5,02892

Przekształcenie zależności na parametr  $\lambda$  da

$$\omega_i = \frac{\lambda_i^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

Wartości częstości drgań własnych dla pierwszych pięciu postaci zamieszczono w tabeli 2.

TABELA 2

Częstości drgań własnych

i	1	2	3	4	5
$\omega_i$ , rad/s	58,954	135,434	428,512	748,801	1006,931

### 3. Analiza numeryczna

Modelując ramę w programie *Robot*, przyjęto następujące parametry analizy modalnej:

- tolerancja - 0,0001;
- liczba iteracji - 40;
- macierz mas - rozłożona;
- metoda iteracji - podprzestrzenna.

W pierwszym podejściu przyjęto, że zarówno słup, jak i rygiel będą zamodelowane jako jeden element. W analizie statycznej dla tak zadanych prętów program daje poprawne wyniki. Można przypuszczać, że programy komercyjne równie dobrze powinny sobie poradzić z analizą modalną czy wyboczeniową. Okazuje się jednak, że w tych typach analiz mogą wystąpić znaczne błędy przy takim minimalistycznym podejściu do modelowania konstrukcji. Tak też stało się w rozważanym przypadku. Dlatego w kolejnych krokach pręty dzielono równomiernie na mniejsze elementy. W programie *Robot* istnieje możliwość podziału prętów na  $n$  równych części na dwa sposoby: z generowaniem węzłów bez dzielenia prętów i z takim podziałem. W przypadku analizy modalnej wybór sposobu podziału nie ma wpływu na wyniki obliczeń. Wartości częstości drgań własnych przy podziale każdego pręta na  $n$  elementów zamieszczono w tabeli 3.

Z analizy częstości drgań własnych zamieszczonych w tabeli 3 wynika, że przy zwiększającej się liczbie elementów, na które zostały podzielone pręty, rozwiązanie dąży zbieżnie do ustalonych wartości. O ile dla pierwszej postaci drgań wartość częstości różni się tylko o 0,37%, to dla kolejnych postaci są to już różnice niedopuszczalne i wynoszą odpowiednio ponad 20, 34, 126 i 107%.

Porównując uzyskane wyniki z analizy numerycznej przeprowadzonej w programie *Robot* dla niepodzielonych prętów ( $n = 1$ ) z rozwiązaniem analitycznym, łatwo zauważyć, że tylko dla pierwszej postaci drgań wartości są zbliżone, natomiast dla wyższych postaci znacznie odbiegają od siebie.

TABELA 3

**Częstości drgań własnych w zależności od podziału prętów na n elementów**

n	$\omega_{1,n}$	$\omega_{2,n}$	$\omega_{3,n}$	$\omega_{4,n}$	$\omega_{5,n}$
1	59,074	162,988	567,772	1663,170	2005,859
2	58,868	135,682	473,209	765,595	1254,742
3	58,858	134,991	428,490	745,347	1069,263
4	58,856	134,866	424,966	737,511	982,591
5	58,855	134,831	423,907	735,710	973,526
6	58,855	134,818	423,513	735,041	969,733
7	58,855	134,812	423,341	734,744	968,024
8	58,855	134,810	423,257	734,595	967,172
9	58,855	134,808	423,212	734,513	966,710
10	58,855	134,807	423,186	734,465	966,442
15	58,854	134,806	423,146	734,386	966,024
20	58,854	134,806	423,139	734,371	965,951
99	58,854	134,806	423,136	734,360	965,914
990	58,857	134,807	423,136	734,361	965,914

Aby łatwiej zauważyć wpływ podziału prętów konstrukcji na dokładność rozwiązania, obliczono błędy względne między wartościami uzyskanymi analitycznie i numerycznie. Błędy te dla i-tej postaci i podziału prętów na n elementów, wyrażone w %, rozumie się jako

$$BW_{i,n} = \frac{\omega_{i,n} - \omega_i}{\omega_i}$$

Zestawienie wartości błędów zamieszczono w tabeli 4.

TABELA 4

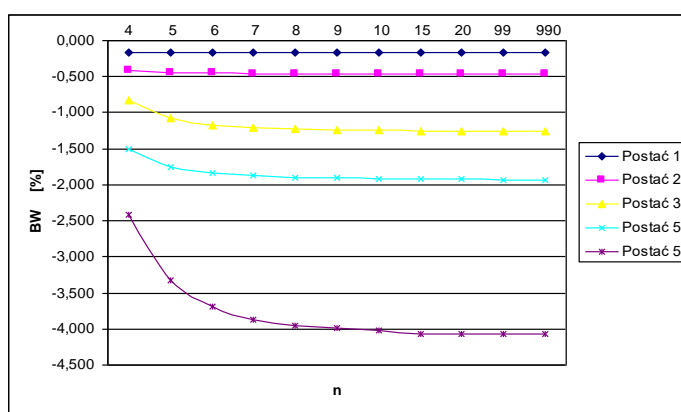
**Błędy względne w zależności od podziału prętów na n elementów, %**

n	$BW_{1,n}$	$BW_{2,n}$	$BW_{3,n}$	$BW_{4,n}$	$BW_{5,n}$
1	0,204	20,345	32,499	122,111	99,205
2	-0,146	0,183	10,431	2,243	24,611
3	-0,163	-0,327	-0,005	-0,461	6,190
4	-0,166	-0,419	-0,828	-1,508	-2,417
5	-0,168	-0,445	-1,075	-1,748	-3,318
6	-0,168	-0,455	-1,167	-1,838	-3,694
7	-0,168	-0,459	-1,207	-1,877	-3,864
8	-0,168	-0,461	-1,226	-1,897	-3,949
9	-0,168	-0,462	-1,237	-1,908	-3,994
10	-0,168	-0,463	-1,243	-1,915	-4,021
15	-0,170	-0,464	-1,252	-1,925	-4,063
20	-0,170	-0,464	-1,254	-1,927	-4,070
99	-0,170	-0,464	-1,255	-1,929	-4,073
990	-0,165	-0,463	-1,255	-1,928	-4,073

Analizując dane z tabeli 4, można zauważyć, że wartość błędów względnych zaczyna stabilizować się od podziału na  $n = 4$  elementy. Dla  $n < 4$  błędy dla niektórych postaci drgań są bardzo duże.

Aby łatwiej zauważyć przebieg zmian błędów względnych dla  $n \geq 4$ , zobrazowano wartości  $BW_{i,n}$  na wykresie (rys. 4).

Dla każdej postaci drgań widać, że przy rosnącej liczbie elementów, na które dzieli się pręty, wartość błędu względnego dąży do ustalonej wartości, przy czym im wyższa postać, tym błąd jest większy. Wynika to z założonego dla obliczeń analitycznych uproszczenia pomijającego wpływ drgań podłużnych (pręty nieściśliwe). Dla układów ramowych złożonych z prętów o dużej smukłości takie uproszczenie jest dopuszczalne. W analizowanym przykładzie dla pierwszych 4 postaci drgań błąd ten nie przekracza 2%.



Rys. 4. Wartości błędów względnych  $BW_{i,n}$

W rzeczywistych konstrukcjach, poza ciężarem własnym, mogą występować inne masy rozłożone w sposób ciągły (np. zespolona z ryglem żelbetowa płyta stropowa), masy skupione (np. zamocowane urządzenia, których rozmiary są dużo mniejsze od gabarytów konstrukcji) i zazwyczaj obciążenia (siły zewnętrzne), mające także wpływ na analizę modalną. Analiza dokonana w przykładzie, uwzględniająca tylko ciężar własny konstrukcji, daje dość wysokie częstości, jednak zauważona prawidłowość będzie również występowała dla konstrukcji z dodatkowymi masami czy siłami.

## Podsumowanie

Użytkownik wykorzystujący programy komputerowe do obliczeń inżynierskich musi być świadomy, że rezultaty obliczeń nie zawsze będą poprawne, nawet przy założeniu, że wprowadzane do programu dane są właściwe. Wynika to z faktu, że metody numeryczne są metodami przybliżonymi i mają pewne ograniczenia. Dys-



kretyzacja w programach jest dokonywana automatycznie i nie zawsze jest poprawna, czasem potrzebna jest interwencja użytkownika, np. zagęszczenie siatki dla płyt w pobliżu narożników czy miejsc przyłożenia sił skupionych.

W przypadku analizy modalnej należy bezwzględnie sprawdzić, czy wartości własne ulegają zmianie przy kolejnym podziale prętów. Poprzestanie na modelu konstrukcji bez podziału będzie skutkowało błędnymi wynikami. Dla konstrukcji bardziej złożonych zbieżność osiąga się szybciej (dla mniejszej liczby podziałów).

### Literatura

- [1] Autodesk Robot Structural Analysis Professional - Podręcznik użytkownika.
- [2] Nowacki W., Mechanika budowli, PWN, Warszawa 1975.
- [3] Nowacki W., Dynamika budowli, Arkady, Warszawa 1961.

### Streszczenie

W artykule przedstawiono wpływ dyskretyzacji konstrukcji na dokładność analizy modalnej w programie *Autodesk Robot Structural Analysis Professional*. Otrzymane wyniki porównano z rozwiązaniem analitycznym.

### Free vibrations of frames and their modeling in Autodesk Robot Structural Analysis program

#### Abstract

In the paper the influence of construction discretization of the accuracy of modal analysis in *Autodesk Robot Structural Analysis Professional* program is presented. The results were compared with the analytical solution.