

Mikhail Hrytsuk, Ryszard Hulboj

WYZNACZENIE ODKSZTAŁCEŃ, PRZEMIESZCZEŃ I NAPRĘŻEŃ W ŁAWACH FUNDAMENTOWYCH NA PODŁOŻU GRUNTOWYM O KSZTAŁCIE WYPUKŁYM

Wprowadzenie

Przy rozwiązaniu zagadnienia przyjmujemy, że bryła fundamentowa jest jednorodna i izotropowa. Dla dolnej części fundamentu, w której znajduje się zbrojenie, wykorzystujemy uśredniony moduł sprężystości, który zakłada współpracę betonu i zbrojenia.

Ławę fundamentową przyjmuje się jako absolutnie sztywną. Jeśli jej podatność t wyznaczona wg [1] będzie mniejsza od 1, to największa podatność wystąpi dla płyty o maksymalnej szerokości 4 m, tj.:

$$t = 10 \frac{E_0 a^3}{E_1 h^3} = 10 \frac{30}{30 \cdot 10^3} \frac{2^3}{0,5^3} = 0,62 < 1$$

gdzie:

E_1 - moduł sprężystości betonu klasy C_{20/25}, równy $30 \cdot 10^3$ MPa;

E_0 - moduł odkształcenia podłoża gruntowego;

h - grubość płyty, m;

a - połowa szerokości płyty, m.

Jeśli $t = 0,62 < 1$, to przy wyznaczeniu naprężeń i odkształceń w podłożu gruntowym odkształcenia ławy nie bierzemy pod uwagę.

1. Równania do wyznaczenia odkształceń w płytach fundamentów ławowych

Do wyznaczenia naprężeń i odkształceń w bryle fundamentowej przyjmujemy równania równowagi i Cauchy'go takie same jak dla podłoża gruntowego, a równania fizyczne (prawo Hooke'a) wyrażamy w następującej postaci (płaski stan odkształceń):

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{1-\mu}{1-2\mu^2} E \varepsilon_x + \frac{\mu}{1-2\mu^2} E \varepsilon_y \\
\sigma_y &= \frac{\mu}{1-2\mu^2} E \varepsilon_x + \frac{1-\mu}{1-2\mu^2} E \varepsilon_y \\
\tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy}
\end{aligned} \tag{1}$$

Wtedy równania równowagi w przemieszczeniach uzyskują postać:

$$\begin{aligned}
\frac{1-\mu}{1-2\mu^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\mu}{1-2\mu^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) &= 0 \\
\frac{1}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{\mu}{1-2\mu^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1-\mu}{1-2\mu^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= 0
\end{aligned} \tag{2}$$

Układ (2) można rozwiązać, stosując metodę różnic skończonych. Wtedy otrzymujemy układ równań liniowych w postaci:

$$\begin{aligned}
U_{ij} &= k_{11}(U_{i+1,j}+U_{i-1,j}) + k_{12}(U_{ij+1}+U_{ij-1}) + k_{13}(V_{i+1,j+1}-V_{i-1,j+1}-V_{i+1,j-1} + V_{i-1,j-1}) \\
V_{ij} &= k_{21}(V_{i+1,j}+V_{i-1,j}) + k_{22}(V_{ij+1}+V_{ij-1}) + k_{23}(U_{i+1,j+1}-U_{i-1,j+1} + U_{i+1,j-1} + U_{i-1,j-1})
\end{aligned} \tag{3}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
k_{11} &= \frac{1-\mu}{(1-2\mu^2)\alpha'_1 \Delta x^2}; & k_{12} &= \frac{1}{2(1+\mu)\alpha'_1 \Delta y^2} \\
k_{13} &= \frac{1+2\mu}{8(1-2\mu^2)(1+\mu)\alpha_1 \Delta x \Delta y}; & k_{21} &= \frac{1}{2(1+\mu)\alpha'_2 \Delta x^2} \\
k_{22} &= \frac{1-\mu}{(1-\mu^2)\alpha'_2 \Delta y^2}; & k_{23} &= \frac{1+2\mu}{8(1-2\mu\mu)(+\mu)\alpha'_2 \Delta x \Delta y} \\
\alpha'_1 &= \left(\frac{2(1-\mu)}{(1-2\mu^2)\Delta x^2} + \frac{1}{(1+\mu)\Delta y^2} \right) \\
\alpha'_2 &= \left(\frac{2(1-\mu)}{(1-2\mu^2)\Delta y^2} + \frac{1}{(1+\mu)\Delta x^2} \right)
\end{aligned}$$

Przekrój płyty fundamentowej zamienia się wraz z siatką o wymiarach $\Delta x \Delta y$ (rys. 1).

Z równań układu (3) wyznacza się przemieszczenia wewnętrznych punktów siatki. Przemieszczenia punktów po krawędzi wyznacza się z warunków granicznych (rys. 1):

- Dla podstawy fundamentu (strefa 2)

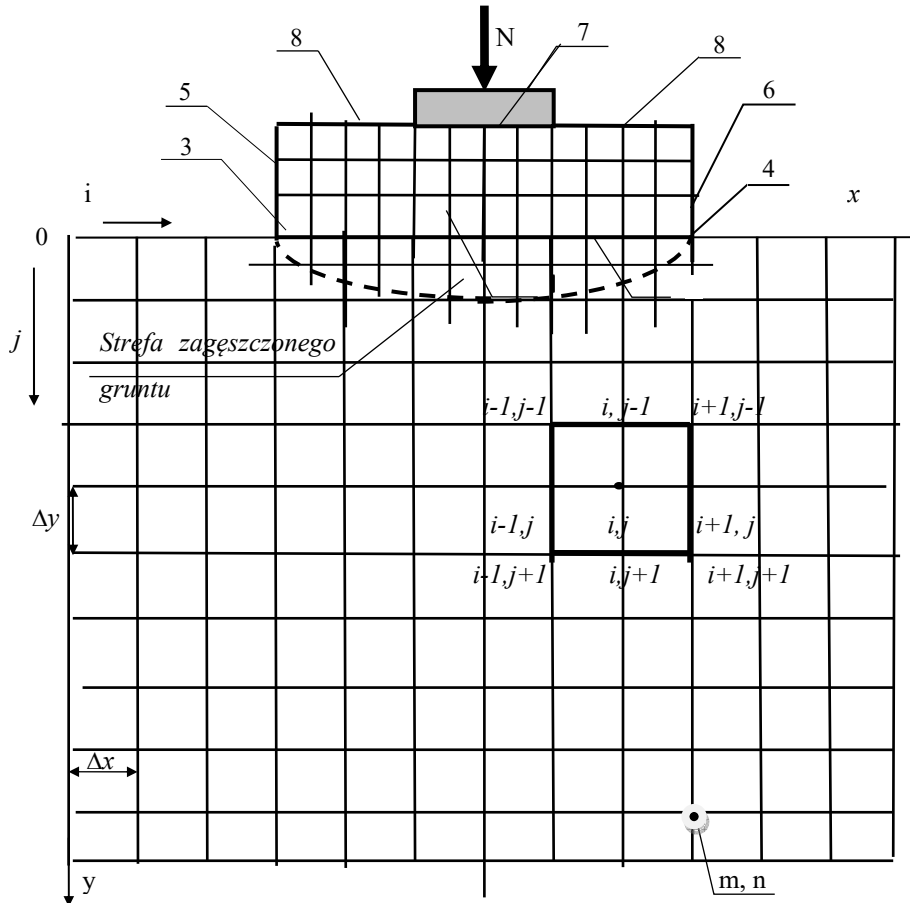
$$\sigma_y = -q_x \quad (4)$$

gdzie:

q_x - ciśnienie na grunt, które wyznacza się z równania (2.3) [2];

- Dla stref 5-6

$$\sigma_x = 0; \sigma_y = 0; \tau_{xy} = 0 \quad (5)$$



Rys. 1. Schemat aproksymacji podłoża gruntowego i ławy fundamentowej (przy obciążeniu całkowitym); 1-8 podział na strefy

2. Wyznaczenie przemieszczeń

Przemieszczenia punktów po krawędzi bryły fundamentowej wyznacza się z następujących równań:

- strefa 2

$$\begin{aligned} U_{i,j} &= -\frac{\Delta y}{2\Delta x}(V_{i+1,j} - V_{i-1,j}) + U_{i,j+1} \\ V_{i,j} &= \frac{-q_i \Delta y(1-2\mu^2)}{\mu'E} + \frac{\mu\Delta y}{(1-\mu)2\Delta x}(U_{i+1,j} - U_{i,j}) + V_{i,j+1} \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie:

$$\mu' = \frac{1}{1+\mu} \quad (7)$$

- punkt 3

$$\begin{aligned} U_{i,j} &= -\frac{\Delta y}{\Delta x}(V_{i+1,j} - V_{i,j}) + U_{i,j+1} \\ V_{i,j} &= \frac{\mu\Delta y}{(1-\mu)\Delta x}(U_{i+1,j} - U_{i,j}) + V_{i,j+1} \end{aligned} \quad (8)$$

- punkt 4

$$\begin{aligned} U_{i,j} &= -\frac{\Delta y}{\Delta x}(V_{i,j} - V_{i-1,j}) + U_{i,j-1} \\ V_{i,j} &= \frac{\mu\Delta y}{(1-\mu)\Delta x}(U_{i,j} - U_{i-1,j}) + V_{i,j+1} \end{aligned} \quad (9)$$

- strefa 5

$$\begin{aligned} U_{i,j} &= \frac{\mu\Delta x}{2(1-\mu)\Delta y}(V_{i,j+1} - V_{i,j-1}) + U_{i+1,j} \\ V_{i,j} &= \frac{\Delta x}{2\Delta y}(U_{i,j+1} - U_{i,j-1}) + V_{i+1,j} \end{aligned} \quad (10)$$

- strefa 6

$$\begin{aligned} U_{i,j} &= -\frac{\mu\Delta x}{2(1-\mu)\Delta y}(V_{i,j+1} - V_{i,j-1}) + U_{i-1,j} \\ V_{i,j} &= -\frac{\Delta x}{2\Delta y}(U_{i,j+1} - U_{i,j-1}) + V_{i-1,j} \end{aligned} \quad (11)$$

- strefa 7

$$U_{i,j} = 0; V_{i,j} = 0 \quad (12)$$

- strefa 8

$$\begin{aligned} U_{i,j} &= -\frac{\Delta y}{2\Delta x}(V_{i,j} - V_{i-1,j}) + U_{i,j-1} \\ V_{i,j} &= -\frac{\mu\Delta y}{2(1-\mu)\Delta x}(U_{i+1,j} - U_{i-1,j}) + V_{i,j-1} \end{aligned} \quad (13)$$

3. Równania do wyznaczenia naprężeń

Aby wyznaczyć naprężenia w bryle fundamentu, wykorzystuje się prawo Hooke'a i dane przemieszczeń wg wzorów (7)-(13), które dla wewnętrznych punktów siatki wynoszą:

- strefa 1

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{(1-\mu)E}{2(1-2\mu^2)\Delta x}(U_{i+1,j} - U_{i-1,j}) + \frac{\mu E}{2(1-2\mu^2)\Delta y}(V_{i,j+1} - V_{i,j-1}) \\ \sigma_y &= \frac{\mu E}{2(1-2\mu^2)\Delta x}(U_{i+1,j} - U_{i-1,j}) + \frac{(1-\mu)E}{2(1-2\mu^2)\Delta y}(V_{i,j+1} - V_{i,j-1}) \\ \tau_{xy} &= \frac{\mu' E}{2\Delta y}(U_{i,j+1} - U_{i,j-1}) + \frac{\mu' E}{2\Delta x}(V_{i+1,j} - V_{i-1,j}) \end{aligned} \quad (14)$$

- strefa 2

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{(1-\mu)E}{2(1-2\mu^2)\Delta x}(U_{i+1,j} - U_{i-1,j}) + \frac{\mu E}{(1-2\mu^2)\Delta y}(V_{i,j+1} - V_{i,j}) \\ \sigma_y &= -q_x \\ \tau_{xy} &= \frac{\mu' E}{\Delta y}(U_{i,j+1} - U_{i,j}) + \frac{\mu' E}{2\Delta x}(V_{i+1,j} - V_{i-1,j}) \end{aligned} \quad (15)$$

- punkt 3

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{(1-\mu)E}{(1-2\mu^2)\Delta x}(U_{i+1,j} - U_{i-1,j}) + \frac{\mu E}{(1-2\mu^2)\Delta y}(V_{i,j+1} - V_{i,j-1}) \\ \sigma_y &= -q_x \\ \tau_{xy} &= \frac{\mu' E}{\Delta y}(U_{i,j+1} - U_{i,j}) + \frac{\mu' E}{\Delta x}(V_{i+1,j} - V_{i,j}) \end{aligned} \quad (16)$$

- strefa 7

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{(1-\mu)E}{(1-2\mu^2)\Delta x}(U_{i+1,j}-U_{i-1,j}) + \frac{\mu E}{(1-2\mu^2)\Delta y}(V_{i,j}-V_{i,j-1}) \\ \sigma_y &= N/B_c \\ \tau_{xy} &= \frac{\mu' E}{\Delta y}(U_{i,j}-U_{i,j-1}) + \frac{\mu' E}{2\Delta x}(V_{i+1,j}-V_{i-1,j})\end{aligned}\quad (17)$$

gdzie B_c - szerokość ściany fundamentowej

- punkt 4

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{(1-\mu)E}{(1-2\mu^2)\Delta x}(U_{i,j}-U_{i-1,j}) + \frac{\mu E}{(1-2\mu^2)\Delta y}(V_{i,j+1}-V_{i,j}) \\ \sigma_y &= -q_x \\ \tau_{xy} &= \frac{\mu' E}{\Delta y}(U_{i,j+1}-U_{i,j}) + \frac{\mu' E}{\Delta x}(V_{i,j}-V_{i-1,j})\end{aligned}\quad (18)$$

• strefa 6

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{(1-\mu)E}{(1-2\mu^2)\Delta x}(U_{i,j}-U_{i-1,j}) + \frac{\mu E}{(1-2\mu^2)\Delta y}(V_{i,j+1}-V_{i,j-1}) \\ \sigma_y &= \frac{\mu E}{(1-2\mu^2)\Delta x}(U_{i,j}-U_{i,j-1}) + \frac{(1-\mu)E}{2(1-2\mu^2)\Delta y}(V_{i,j+1}-V_{i,j-1}) \\ \tau_{xy} &= \frac{\mu' E}{\Delta y}(U_{i,j}-U_{i,j-1}) + \frac{\mu' E}{\Delta x}(V_{i,j+1}-V_{i-1,j})\end{aligned}\quad (19)$$

• strefa 5

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{(1-\mu)E}{(1-2\mu^2)\Delta x}(U_{i+1,j}-U_{i,j}) + \frac{\mu E}{(1-2\mu^2)\Delta y^2}(V_{i,j+1}-V_{i,j-1}) \\ \sigma_y &= \frac{\mu E}{(1-2\mu^2)\Delta x}(U_{i+1,j}-U_{i,j}) + \frac{(1-\mu)E}{(1-2\mu^2)\Delta y}(V_{i,j+1}-V_{i,j-1}) \\ \tau_{xy} &= \frac{\mu' E}{2\Delta y}(U_{i,j+1}-U_{i,j}) + \frac{\mu' E}{\Delta x}(V_{i+1,j}-V_{i,j-1})\end{aligned}\quad (20)$$

• strefa 8

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{(1-\mu)E}{(1-2\mu^2)\Delta x}(U_{i+1,j}-U_{i-1,j}) + \frac{\mu E}{(1-2\mu^2)\Delta y^2}(V_{i,j}-V_{i,j-1}) \\ \sigma_y &= \frac{\mu E}{2(1-2\mu^2)\Delta x}(U_{i+1,j}-U_{i-1,j}) + \frac{(1-\mu)E}{(1-2\mu^2)\Delta y}(V_{i,j}-V_{i,j-1}) \\ \tau_{xy} &= \frac{\mu' E}{\Delta y}(U_{i,j}-U_{i,j-1}) + \frac{\mu' E}{2\Delta \Delta}(V_{i+1,j}-V_{i-1,j})\end{aligned}\quad (21)$$

Z układu równań (14) można wyznaczyć naprężenia w punktach wewnętrznych bryły fundamentowej, a z układu równań (15)-(21) - na jego krawędzi.

Podsumowanie

Wymiary siatki aproksymującej podłoże gruntowe i fundament przyjmuje się w taki sposób, aby przemieszczenia w punktach po krawędziach siatki były nieobecne. Po obliczeniu odkształceń i naprężeń w fundamentach ławowych, w stanie płaskim, można zastosować standardowe metody wykonania programu komputerowego w celu ułatwienia obliczeń.

Literatura

- [1] Горбунов-Посадов М.И. и др., Расчет конструкций на упругом основании, Стройиздат, М.: 1984, 680 с.
- [2] Hrytsuk M., Racjonalne konstrukcje fundamentów płytowych, Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa 2010.

Streszczenie

W artykule omówiono sposób wyznaczenia odkształceń, przemieszczeń i naprężeń w ławach fundamentowych posadowionych na podłożu gruntowym o kształcie wypukłym. Przedstawiono założenia odnośnie do przyjęcia siatki aproksymującej podłoże gruntowe w celu dokonania obliczeń komputerowych.

Determination of strain, displacement and stress in strip foundations on convex shape sub-soil

Abstract

The article concerns the designation of strain, displacement and stress on the foundations of lava ground floor of a convex shape. These calculations can be used to develop a computer program for rapid sizing in order to account for the proposed foundation.