

Witold Paleczek

ANALIZA DOKŁADNOŚCI OBLICZANIA OBJĘTOŚCI MAS ZIEMNYCH

Wprowadzenie

We współcześnie realizowanych projektach budowlanych, wykorzystujących opracowania geodezyjne, do obliczania objętości mas ziemnych stosowane są programy komputerowe zaliczane do oprogramowania geodezyjnego. Spośród wielu stosowanych w praktyce zawodowej można tu wymienić przykładowo: WinKalk, C-Geo, Surfer, Operat, MicroMap, Bentley InRoads. Zastosowane tam algorytmy umożliwiają obliczanie objętości nasypów i wykopów z uwzględnieniem różnych konfiguracji płaszczyzn i powierzchni odniesienia. Otrzymywane rezultaty obliczeń z każdego z tych programów różnią się od siebie, co jest zjawiskiem naturalnym, bo wynikającym z różnych sposobów realizacji objętości w przestrzeni 3D stosowanych w obliczeniach inżynierskich [1-10].

Zgodnie z normatywami [10], do obliczania objętości mas ziemnych może być stosowana metoda modelowania numerycznego z użyciem elektronicznej techniki obliczeniowej, natomiast błąd względny obliczenia objętości nie powinien przekraczać odpowiednio:

- a) 6% objętości dla przedziału od 0 do 20 000 m³,
- b) 5% objętości dla przedziału od 20 000 do 50 000 m³,
- c) 4% objętości dla przedziału 50 000 do 200 000 m³,
- d) 3% objętości dla przedziału 200 000 do 500 000 m³,
- e) 2% objętości dla przedziału ponad 500 000 m³,

natomiast wartości procentowe dla podanych granic z wyszczególnionych przedziałów można uporządkować następująco:

- ad a) $20\,000 \cdot 0,06 = 1200\text{ m}^3$,
- ad b) $50\,000 \cdot 0,05 = 2500\text{ m}^3$,
- ad c) $200\,000 \cdot 0,04 = 8000\text{ m}^3$,
- ad d) $500\,000 \cdot 0,03 = 15\,000\text{ m}^3$,
- ad e) $500\,001 \cdot 0,02 > 10\,000\text{ m}^3$.

Trudnym do zrealizowania zadaniem w cytowanej pracy [10] jest interpretacja objętości odniesienia, względem której obliczany jest *błąd względny objętości*, który zgodnie z definicją błędu względnego można określić ze wzorów (1a) i (1b) lub (10), [6]:

$$|\delta_V| = \left| \frac{V_w - V_o}{V_w} \right| \text{ lub procentowo } |\delta_V| = \left| \frac{V_w - V_o}{V_w} \right| \cdot 100 [\%] \quad (1a), (1b)$$

gdzie: V_w - objętość odniesienia (objętość „wzorcową”), V_o - objętość obliczona. W rozpatrywanym tu zadaniu problemem jest przyjęcie objętości odniesienia (objętości „wzorcowej”) V_w , względem której obliczany jest omawiany *błąd względny* określony w normie [10].

1. Przegląd metod stosowanych w programach do obliczania objętości mas ziemnych

Z metod algorytmicznych można tu rozróżnić następujące:

- metodę siatki kwadratów,
- metodę trójkątów,
- metodę przekrojów poziomych,
- metodę przekrojów poprzecznych,
- metodę czworościanów.

W metodzie siatki kwadratów pojedyncza bryła elementarna jest zbudowana na bazie ściętego sześciangu, czyli o polu powierzchni kwadratu P i zmiennych wysokościach krawędzi z_i . Objętość V bryły elementarnej obliczana jest ze wzoru:

$$V = \frac{P \cdot (z_1 + z_2 + z_3 + z_4)}{4} \quad (2)$$

Kolejną jest metoda siatki trójkątów oparta na bazie graniastoslupa ściętego o podstawie trójkąta P i prostopadłych do podstawy, zmiennych wysokościach krawędzi z_i . Objętość V bryły elementarnej obliczana jest ze wzoru:

$$V = \frac{P_{\Delta} \cdot (z_1 + z_2 + z_3)}{3} \quad (3)$$

W metodzie przekrojów poziomych wykorzystywana jest zasada wynikająca z obliczania pól powierzchni P_i powstałych z digitalizacji (dyskretyzacji, kwantowania, próbkowania) warstwicz uzyskanych z przekroju płaszczyznami poziomymi o ustalonej różnicy wysokości cięcia warstwiczowego h , w których odpowiednio P_0 jest polem powierzchni warstwicy ograniczonej najmniejszą warstwica, P_1 jest polem powierzchni ograniczonej warstwica o h większą, natomiast P_n jest polem

powierzchni ograniczonej największą warstwicą; resztowa objętość pomiędzy największą warstwicą i punktem o największej wysokości Δh obliczana jest przez analogię do wzoru na objętość stożka; objętość elementarną w tej metodzie oblicza się ze wzoru:

$$V = \frac{h}{3} \cdot \left(P_0 + P_1 + \sqrt{P_0 \cdot P_1} + P_1 + P_2 + \sqrt{P_1 \cdot P_2} + \dots + P_i + P_{i+1} + \sqrt{P_i \cdot P_{i+1}} + \dots + P_{n-1} + P_n + \sqrt{P_{n-1} \cdot P_n} \right) + \frac{P_n \cdot \Delta h}{3} \quad (4)$$

W przypadku metody przekrojów poprzecznych stosowana jest zasada analogii jak w przypadku obliczania objętości pryzmy (klina ściętego) o następujących właściwościach:

- podstawami jej są prostokąty leżące na równoległych płaszczyznach,
- ściany boczne tworzą trapezy, których kąty nachylenia przeciwległych ścian do podstawy są sobie równe; jeśli a_1, b_1 oraz a_2 i b_2 są odpowiednio bokami podstaw pryzmy, a h wysokością, to objętość pryzmy jest określona wzorem:

$$V = \frac{h \cdot [a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + (a_1 + a_2) \cdot (b_1 + b_2)]}{6} \quad (5)$$

Objętość klina, którego podstawą jest prostokąt, a ścianami bocznymi dwa trapezy równoramienne i dwa trójkąty równoramienne, i przy oznaczeniach a oraz b jako boków podstawy, natomiast przez c krawędzi tworzonej przez dwie podstawy trapezów, a odległej o wysokość h klina, można określić wzorem:

$$V = \frac{h \cdot b \cdot (2 \cdot a + c)}{6} \quad (6)$$

W metodzie czworościanów objętość bryły elementarnej opisanej przez współrzędne ortokartezjańskie wierzchołków czworościanu określana jest wzorem:

$$V = \frac{1}{6} \cdot \det \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \quad (7)$$

W zależności od sposobu zastosowania elementarnej bryły w algorytmie obliczania objętości jako kombinacji przedstawionych tu metod oraz w zależności od dokładności dyskretyzacji obliczanego modelu bryły otrzymywane są różne wyniki. Można zauważyć, że odniesienie się do błędu względnego objętości bryły ma sens wtedy, gdy porównawczo dysponujemy wynikiem obliczeń z metody o wyższej dokładności.

2. Metody terenowe pomiaru stosowane przy obliczaniu objętości mas ziemnych

Na wybór metody pomiarów w terenie składa się wiele czynników, o których decydują rodzaj i rozległość obszaru oraz dostępność sprzętu pomiarowego. W praktyce inżynierskiej rozróżniane są następujące metody:

- metoda niwelacji siatkowej,
- metoda punktów rozproszonych,
- metoda niwelacji przekrojów podłużnych i poprzecznych,
- tachimetria,
- metoda RTK - GPS (*Real Time Kinematic - Global Position System*),
- metoda interferometrii radarowej,
- metoda skaningu laserowego.

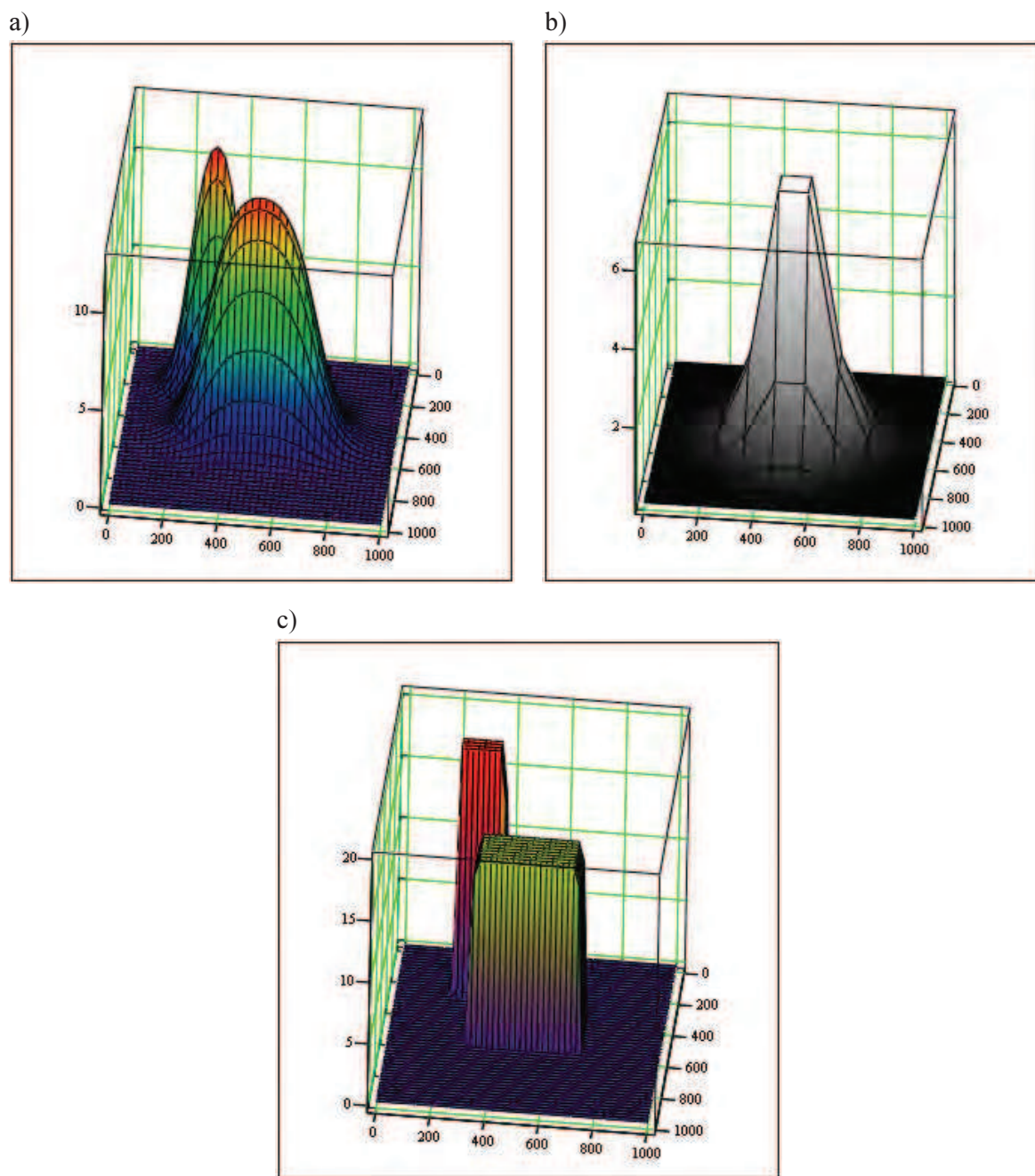
Wyniki otrzymywane z trzech ostatnich metod zaliczane są do najdokładniejszych.

3. Porównanie wyników obliczeń objętości bryły modelowanej z objętością bryły aproksymowanej

Do przeprowadzenia obliczeń objętości wykorzystano kilka różnych kombinacji wymienionych tu metod; w przeważających przypadkach dominował model bazujący na siatce kwadratów, przekrojów pionowych i czworościanów przy jednoczesnym wykorzystaniu aproksymacji powierzchni terenu z uwzględnieniem interpolacji w przekrojach pionowych za pomocą dwuwymiarowych funkcji sklejanych sześciennych [5-8]. Przy modelowaniu objętości analizowanej przestrzeni wykorzystano między innymi funkcję określoną wzorem (8), natomiast jej objętość obliczano ze wzoru (9), korzystając z metod numerycznych [5, 7, 8]. Obliczenia objętości testowych wstępnie wykonano na stożkach aproksymowanych przestrzenną krzywą rozkładu normalnego (rys. 1a, b) oraz na ostrosłupach ściętych zbliżonych kształtem do prostopadłościów (rys. 1c):

$$F_m(x, y) = \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{a_{1i}}{1 + \exp(-b_{1i} \cdot (x - x_{1i}))} - \frac{a_{1i}}{1 + \exp(-b_{2i} \cdot (x - x_{2i}))} \right) \cdot \left(\frac{1}{1 + \exp(-b_{3i} \cdot (y - y_{1i}))} - \frac{1}{1 + \exp(-b_{4i} \cdot (y - y_{2i}))} \right) \right] \quad (8)$$

$$V_m = \int_0^N \int_0^N F_m(x_i, y_i) dx dy \quad (9)$$



Rys. 1. Wizualizacja stożków ściętych o zadanym promieniu krzywizny podstawy aproksymowanych krzywymi przestrzennymi zbliżonymi do rozkładu normalnego (a, b) oraz ostrosłupów ściętych o podstawie prostokąta jako brył o objętościach testowych (c)

Obliczenia współczynnika procentowego przeprowadzono ze wzoru (10), a uzyskane wyniki zestawiono w tabeli 1:

$$\delta_{\%} = \left| 100 \cdot \left(1 - \frac{V_o}{V_w} \right) \right| \quad (10)$$

TABELA 1

Zestawienie wyników obliczeń numerycznych objętości modelowej i objętości aproksymującej oraz błędów względnych otrzymanych wartości przy zadanych wartościach dopuszczalnych

Lp.	V_o	V_w	δ % obl	δ % dop
1	0,4	0,3	33,3	6
2	59	42	29,3	6
3	580	482	16,8	6
4	8136	7217	11,3	6
5	14 159	12 041	14,9	6
6	134 399	132 835	1,2	4
7	435 999	437 874	0,4	3
8	1 559 999	1 578 207	1,2	2

Wnioski

Analiza obliczeń błędów względnych obliczenia objętości modelowej i aproksymowanej pozwala stwierdzić, że przy objętościach zawierających się w przedziale od 0 do 20 000 m³ uzyskiwany błąd względny objętości modelu i jego aproksymaty znacznie przekracza wartości dopuszczalne niezależnie od kierunku obliczeń błędu względnego jako wartości. W przypadkach niewielkich objętości (znacznie poniżej 1 m³) otrzymany błąd względny niekiedy przekraczał znacznie wartość 100% - przykładem może być zestawienie następujących wartości: $V_w = 0,0001$ oraz $V_o = 0,001$ to $\delta = 900\%$ przy wartości dopuszczalnej wynoszącej 6%.

Wnioski z przeprowadzonej analizy numerycznej mogą przyczynić się do zintensyfikowania badań nad udoskonalaniem algorytmów wykorzystywanych do obliczania mas ziemnych w odniesieniu do wymagań normatywnych.

Literatura

- [1] Bajkowska E. i inni, Elementy geodezji w pomiarach inżynierskich, Wydawnictwo Politechniki Białostockiej, Białystok 1995.
- [2] Czaja J., Wybrane zagadnienia z geodezji inżynierskiej, Wydawnictwo AGH, Kraków 1993.
- [3] Gocał J., Geodezja inżyniersko-przemysłowa, Część I, Wydawnictwo AGH, Kraków 1999.
- [4] Jagielski A., Podstawy geodezji inżynierskiej. Standardy, pomiary realizacyjne, trasy, objętości, Wydawnictwo Geodpis, Kraków 2012.
- [5] Paleczek W., Mathcad w algorytmach, Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa 2005.
- [6] Paleczek W., Metody analizy danych na przykładach, Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa 2004.

- [7] Paleczek W., Modelowanie deformacji powierzchni terenu wskutek podziemnej eksploatacji górniczej w aspekcie budownictwa na terenach górniczych, Seria Monografie Nr 252, Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa 2013.
- [8] Paleczek W., Zagadnienia teoretyczno-empirycznych analiz i modelowania deformacji terenów górniczych, Seria Monografie Nr 208, Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa 2011.
- [9] Poręba M., Nowoczesne metody pomiarów mas ziemnych, Archiwum Fotogrametrii, Kartografii i Teledetekcji AGH, Kraków 2009.
- [10] Rozporządzenie Ministra Gospodarki z dnia 19 czerwca 2002 r. w sprawie dokumentacji mierniczo-geologicznej, Dz.U. 02.92.819; Część IV, pkt 4.3.8.

Streszczenie

Przedstawiono przegląd metod stosowanych do obliczania objętości mas ziemnych. Podano wartości dopuszczalne błędów względnych przy obliczaniu mas ziemnych według norm. Porównano wartości otrzymane z obliczeń z normami.

Słowa kluczowe: obliczanie objętości mas ziemnych, metody numeryczne, algorytmy w budownictwie, procedury środowiska MathCAD

Analysis of the calculation accuracy of soil mass volume

Summary

The article provides an overview of the methods used to calculate soil mass volume. Admissible values of relative errors in the soil mass calculation according to standard values were given. Calculated values were compared with norms.

Keywords: calculation of soil mass, numerical methods, algorithm use in architecture, MathCAD environment procedures