



## Obliczanie skuteczności geometrycznej tarczy zacierającej metodą analityczną

Jarosław Kalinowski<sup>1</sup>

### STRESZCZENIE:

W artykule przedstawiono sposób obliczeń skuteczności geometrycznej  $S_g$  zacierania lub szlifowania powierzchni metodą wykorzystującą wzory analityczne. Sposób ten porównano z metodą symulacji. Zastosowanie wzorów analitycznych pozwala na zmniejszenie czasu obliczeń w porównaniu do obliczeń symulacyjnych dla elementów roboczych o kształcie kół lub pierścieni. Przedstawiona aproksymacja dowolnych geometrii elementów roboczych współśrodkowymi pierścieniami pozwala na uzyskanie średniej wartości wzdłuż kierunku ruchu tarczy w sposób dokładny przy małym nakładzie obliczeniowym. Duże prędkości obrotowe w stosunku do postępowej stosowane w zacieraczkach tarczowych dają dużą równomierność obróbki w kierunku równoległym do ruchu maszyny, nieodbiegając znacznie od średniej. Zastosowanie macierzy skuteczności geometrycznej pierścieni, której współczynniki można uzyskać z wzorów analitycznych i macierzy współczynników wypełnienia pierścieni pozwala przez ich wymnożenie uzyskać niskim nakładem obliczeniowym wartości skuteczności geometrycznej tarczy w kierunku prostopadłym do ruchu zacieraczki. Wykorzystując algorytmy optymalizacji poprzez modyfikację wartości współczynników wypełnienia macierzy, można udoskonalać geometrie tarcz z uwagi na pożądaną skuteczność geometryczną i równomierność jej rozkładu.

### SŁOWA KLUCZOWE:

skuteczność geometryczna; zacieranie; szlifowanie; beton; symulacja

## 1. Wprowadzenie

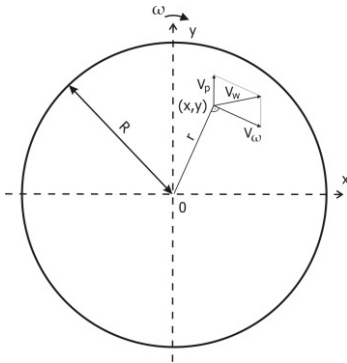
Maszyny z tarczowymi elementami roboczymi są stosowane do zacierania mieszanki betonowej i szlifowania powierzchni betonu lub kamienia. Są one proste w budowie, charakteryzują się wysoką niezawodnością oraz wydajnością [1, 2]. Problemem jest natomiast zapewnienie odpowiedniej równomierności obróbki ze względu na złożoną kinematykę ruchu.

Zastosowanie tarcz do zacierania powierzchni betonu ma na celu polepszenie parametrów fizykomechanicznych i eksploatacyjnych powierzchni i przypowierzchniowej warstwy betonu, takich jak zwiększona odporność na uderzenia, jednorodny współczynnik tarcia, zmniejszona ścieralność [3]. W zacieraczkach używa się tarcz do zacierania wstępnego różnego kształtu, najczęściej czterech łopatek zbliżonych kształtem do prostokąta, oraz tarcz do zacierania końcowego w kształcie pełnego koła. Parametrem ilościowym oddziaływania tarczy na obrabianą powierzchnię jest skuteczność geometryczna  $S_g$ . W celu uzyskania jak największej równomierności obróbki powierzchni stosuje się geometrie tarcz zoptymalizowane pod kątem równomierności oddziaływania i tory ruchu z częściowo pokrywającymi się obszarami obróbki. Aby geometrie i tory tarcz zacierających poddać optymalizacji w możliwym do przyjęcia czasie, potrzebne są efektywne sposoby dokładnego obliczania skuteczności geometrycznej [4, 5].

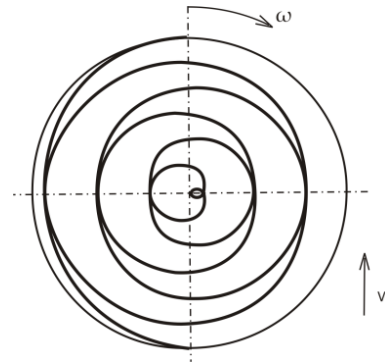
<sup>1</sup> Politechnika Częstochowska, Wydział Budownictwa, ul. Akademicka 3, 42–218 Częstochowa, e-mail: jkal@bud.pcz.pl, orcid id: 0000-0001-8922-4788

## 2. Kinematyka tarczy zacierającej

Modelowy ruch tarczy polega na jej ruchu po obrabianej powierzchni ruchem jednostajnym prostoliniowym i jednoczesnym obrocie wokół jej osi ruchem jednostajnym obrotowym. Kontakt tarczy z dowolnym obrabianym punktem następuje przy prędkości będącej sumą wektorową prędkości postępowej i prędkości liniowej wynikającej z prędkości obrotowej. Prędkość liniowa, wynikająca z obrotu tarczy, jest wprost proporcjonalna do długości wektora wodzącego od środka tarczy do badanego punktu, ma kierunek prostopadły do tego wektora i zwrot zgodny z kierunkiem obrotowym tarczy, jak przedstawiono na rysunku 1.



**Rys. 1.** Składanie prędkości postępowej i prędkości liniowej wynikającej prędkości obrotowej [6]

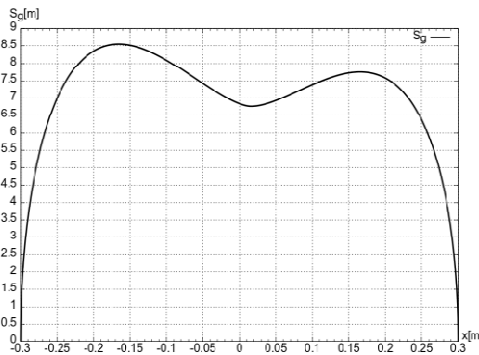


**Rys. 2.** Linia kontaktu obrabianego punktu z tarczą pełną po całkowitym przejściu przez ten punkt. Długość tej linii określa wartość skuteczności geometrycznej

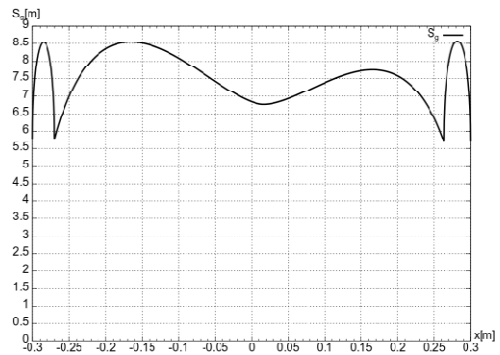
Prędkość wypadkowa  $V_w$  dla tarczy o prędkości postępowej  $V_p$  i obrotowej określona jest wzorem

$$V_w(x, y) = \sqrt{V_p^2 + 2V_p x \omega + y^2 \omega^2 + x^2 \omega^2} \quad (1)$$

Skutecznością geometryczną narzędzia roboczego  $S_g$  w danym punkcie obrabianej powierzchni nazywamy długość linii kontaktu punktu z powierzchnią elementu roboczego po całkowitym przejściu narzędzia roboczego przez ten punkt.



**Rys. 3.** Wykres skuteczności geometrycznej  $S_g$  dla pojedynczego przejścia tarczy pełnej,  $D = 0,6$  m,  $V_p = 0,1$  m/s,  $\omega = 7,54$  rad/s



**Rys. 4.** Wykres skuteczności geometrycznej  $S_g$  dla tarczy pełnej z nałożonymi optymalnie strefami obróbki,  $D = 0,6$  m,  $V_p = 0,1$  m/s,  $\omega = 7,54$  rad/s

Przykładowy kształt linii przy przejściu tarczy pełnej przez punkt będący w środku oddziaływania tarczy przedstawiono na rysunku 2. Długość tej linii jest skutecznością geometryczną

oddziaływania tarczy na ww. punkt. Wartości skuteczności geometrycznej w kierunku prostopadłym do ruchu tarczy dla pojedynczego przejścia przedstawiono na rysunku 3, a na rysunku 4 pokazano wykres skuteczności przy nakładaniu obszarów roboczych dających optymalną równomierność obróbki.

### 3. Metodyka symulacji zacierania

Oprogramowanie do obliczeń skuteczności geometrycznej zostało zaimplementowane w języku C++ z wykorzystaniem programowania obiektowego. Analizowaną geometrię tarczy definiuje się za pomocą obiektów klas figur podstawowych, takich jak: koło, wycinek pierścienia, wielobok złożony z odcinków. Powierzchnie zdefiniowane przez figury proste mogą być dodawane lub odejmowane do/z powierzchni elementu roboczego poprzez przypisanie im odpowiednich atrybutów. Każda z klas figur podstawowych ma zdefiniowane metody wirtualne pozwalające na ich: obrót względem dowolnego punktu, przesunięcie, sprawdzenie, czy punkt o danych współrzędnych należy do figury. Powierzchnia robocza jest związana z tarczą, która może wykonywać ruch obrotowy i postępowy. Ruch tarczy definiowany jest przez obiekt klasy Tor, zdefiniowany współrzędnymi środka tarczy na początku i końcu odcinka ruchu oraz prędkościami postępowymi i obrotowymi. Obiekt typu Trasa może zawierać dowolną ilość obiektów typu Tor. Skuteczność oddziaływania obliczana jest dla punktów, które zapamiętywane są w obiektach klasy Sensor, które zapamiętują współrzędne punktu i wartości obliczanych parametrów. Obiekt klasy Sim zarządzający obiektami typu Tarcza, Trasa, Sensory, kierując się czasem symulacji  $t$ , wymusza współdziałanie obiektów. Poczynając od chwili  $t$ , oznaczającej początek symulacji co krok symulacji  $dt$  ustawia obiekt Tarcza w położeniu określonym kątem obrotu i przesunięciem wyznaczonym przez obiekt Trasa. Dla każdego położenia tarczy na rzecz każdego sensora wykonywane jest sprawdzenie, czy sensor styka się z elementem roboczym. W przypadku kontaktu obliczana jest wektorowa suma prędkości postępowej tarczy i prędkości liniowej wynikającej z ruchu obrotowego w punkcie położenia sensora. Do sensora dodawana jest wartość długości kontaktu z elementami roboczymi tarczy, będąca iloczynem wektora wypadkowego prędkości i kroku czasowego  $dt$ . Jeżeli w poprzedniej iteracji zmieniło się oddziaływanie tarczy na sensor, to w celu zwiększenia dokładności obliczana jest interpolacja czynnego oddziaływania elementu roboczego przez analizę przecięcia wycinka drogi oddziaływania w aktualnej iteracji z przecięciem krawędzi elementu roboczego.

Analiza skuteczności geometrycznej tarczy zacierającej poruszającej się ruchem jednostajnym prostoliniowym i jednostajnym obrotowym upraszcza definicję zadania do odcinka sensorów prostopadłego do osi ruchu środka tarczy, przy położeniu środka tarczy na początku i końcu ruchu znajdującego się w odległości promienia tarczy  $R$  od linii sensorów po przeciwnych stronach i stałej prędkości obrotowej i postępowej.

### 4. Wzory analityczne skuteczności geometrycznej dla figur prostych

Analityczne wyznaczenie skuteczności geometrycznej oddziaływania dla koła umożliwia znajomość prędkości przesuwu tarczy dla dowolnego punktu wg wzoru (1). Po uzależnieniu rzędnej punktu od czasu ruchu  $t$  w ruchu jednostajnym prostoliniowym otrzymujemy wzór (2):

$$V_w(x,t) = \sqrt{V_p^2 + 2V_p x \omega + t^2 V_p^2 \omega^2 + x^2 \omega^2} \quad (2)$$

Skuteczność geometryczna jako długość linii kontaktu jest iloczynem prędkości przesuwu elementu roboczego po danym punkcie i czasu tego oddziaływania, co opisane jest wzorem (3):

$$S_g(x) = \int V_a(x,t) dt \quad (3)$$

Dobierając wartości graniczne  $t$  dla przejścia tarczy, można wyznaczyć wzory analityczne dla  $S_g$ .

#### 4.1. Obliczenie $S_g$ dla elementu roboczego w kształcie koła

Skuteczność geometryczna oddziaływania elementu kołowego o promieniu  $R$  po przejściu tarczy, której oś przechodzi przez początek układu współrzędnych 0, jest opisana wzorem (4) dla  $x \in -R; R$ . W pozostałych przypadkach  $S_g = 0$ :

$$S_g(x) = \frac{1}{V_p} \sqrt{(R^2 - x^2)(V_p^2 + 2V_p \omega x + \omega^2 R^2)} + \frac{(V_p + x\omega)^2}{2\omega V_p} \ln \left( \frac{\sqrt{V_p^2 + 2V_p \omega x + \omega^2 R^2} + \omega \sqrt{R^2 - x^2}}{\sqrt{V_p^2 + 2V_p \omega x + \omega^2 R^2} - \omega \sqrt{R^2 - x^2}} \right) \quad (4)$$

#### 4.2. Obliczenie $S_g$ dla elementu roboczego w kształcie pierścienia

Skuteczność geometryczna  $S_g$  oddziaływania elementu pierścieniowego o promieniu zewnętrznym  $R_z$  i promieniu wewnętrznym  $R_w$  po pojedynczym przejściu tarczy można obliczyć z zasady superpozycji, odejmując od skuteczności koła o promieniu  $R_z$  skuteczność koła o promieniu  $R_w$ , co opisane jest wzorem:

$$S_g = S_{gR_z} - S_{gR_w} \quad (5)$$

gdzie:  $S_{gR_z}$ ,  $S_{gR_w}$  – skuteczność geometryczna obliczona dla koła o promieniach odpowiednio  $R_z$ ,  $R_w$ .

Po uproszczeniu wzory przyjmą następującą postać dla poszczególnych przypadków: dla  $|x| \in (0; R_w)$

$$S_g(x) = \frac{1}{V_p} \left( \sqrt{(R_z^2 - x^2)(V_p^2 + 2V_p \omega x + \omega^2 R_z^2)} - \sqrt{(R_w^2 - x^2)(V_p^2 + 2V_p \omega x + \omega^2 R_w^2)} \right) + \frac{(V_p + x\omega)^2}{\omega V_p} \ln \left( \frac{\sqrt{V_p^2 + 2V_p \omega x + \omega^2 R_z^2} + \omega \sqrt{R_z^2 - x^2}}{\sqrt{V_p^2 + 2V_p \omega x + \omega^2 R_w^2} + \omega \sqrt{R_w^2 - x^2}} \right) \quad (6)$$

dla  $|x| \in (R_w; R_z)$  wzór przyjmuje postać analogiczną jak dla koła

$$S_g(x) = \frac{1}{V_p} \sqrt{(R_z^2 - x^2)(V_p^2 + 2V_p \omega x + \omega^2 R_z^2)} + \frac{(V_p + x\omega)^2}{2\omega V_p} \ln \left( \frac{\sqrt{V_p^2 + 2V_p \omega x + \omega^2 R_z^2} + \omega \sqrt{R_z^2 - x^2}}{\sqrt{V_p^2 + 2V_p \omega x + \omega^2 R_z^2} - \omega \sqrt{R_z^2 - x^2}} \right) \quad (7)$$

dla  $|x| > R_z$  wartość skuteczności geometrycznej wynosi  $S_g = 0$ .

### 5. Dokładność i czas obliczeń metodą symulacji skuteczności geometrycznej $S_g$ w zależności od założonego $dt$

Czas obliczeń i dokładność w metodzie symulacyjnej zależą od przyjętego kroku czasowego. Im mniejszy krok czasowy przyjęty jest w obliczeniach, tym większa jest dokładność otrzymanych wyników, a dłuższy czas obliczeń ze względu na proporcjonalnie zwiększoną ilość iteracji. Zwiększenie dokładności przy zmniejszeniu kroku czasowego  $dt$  wynika ze zwiększenia ilości

odcinków, na które dzielona jest krzywa kontaktu. Powoduje to również zmniejszenie błędów dla wycinków krzywej, gdzie tylko część jego długości pokrywa się z powierzchnią roboczą. Ma to miejsce w chwilach czasowych, w których następuje zmiana stanu analizowanego punktu z nieobrabanego na obrabiany lub odwrotnie. Przy nieograniczonym zmniejszeniu wartości  $dt$  nastąpiłoby zmniejszenie dokładności ze względu na numeryczne dodawanie bardzo małych liczb do dużej liczby sumy i utratę mniej znaczących cyfr lub w przypadkach skrajnych brak zmiany wartości sumy [7]. Określenie optymalnego kroku czasowego bez znajomości wartości dokładnej jest trudne do oszacowania.

### 5.1. Element roboczy w kształcie koła

Wartość średniej skuteczności geometrycznej dla tarczy pełnej w kształcie koła o średnicy  $D = 0,6$  m poruszającej się ruchem postępowym z prędkością  $V_p = 0,1$  m/s i prędkością obrotową  $\omega = 7,54$  rad/s dla 10001 sensorów, obliczona metodą analityczną, wyniosła 7,116519278 m, a obliczenie trwało 0,559 ms. Obliczenie tej wartości z dokładnością do siódmej cyfry znaczącej wymagało przy metodzie symulacyjnej przyjęcia  $dt$  o wartości 0,0027 s i trwało 4,8 s. Wartości  $S_g$  w zależności od wybranych  $dt$  przedstawiono w tabeli 1. Powyżej  $dt = 0,0008$  s nastąpiła stabilizacja wyniku obliczeń.

**Tabela 1**

Wartości średniej skuteczności geometrycznej dla tarczy pełnej i pierścienia w zależności od wartości kroku czasowego  $dt$ ,  $V_p = 0,1$  m/s,  $\omega = 7,54$  rad/s

Tarcza pełna $D = 0,6$ m		Tarcza pierścieniowa $D_z = 0,6$ m, $D_w = 0,54$ m	
$dt$ [s]	$S_g$ [m]	$dt$ [s]	$S_g$ [m]
0,1	7,278649	0,1	1,926384
0,05	7,205994	0,05	1,942140
0,01	7,124232	0,01	1,928692
0,005	7,118094	0,005	1,927173
0,001	7,115906	0,001	1,926630
0,0005	7,115833	0,0005	1,926611
0,0001	7,115809	0,0003	1,926605
0,0008	7,115808		

### 5.2. Element roboczy w kształcie pierścienia

Wartość średniej skuteczności geometrycznej dla tarczy w kształcie pierścienia o średnicy zewnętrznej  $D_z = 0,6$  m, średnicy wewnętrznej  $D_w = 0,54$  m poruszającej się ruchem postępowym z prędkością  $V_p = 0,1$  m/s i prędkością obrotową  $\omega = 7,54$  rad/s, obliczona metodą analityczną, wyniosła 1,926797369 m, a obliczenie trwało 0,621 ms. Obliczenie tej wartości z dokładnością do siódmej cyfry znaczącej wymagało przy metodzie symulacyjnej identycznie jak dla koła  $dt = 0,0027$  s i trwało 4,1 s. Przykładowe wartości  $S_g$  w zależności od przyjętego  $dt$  przedstawiono w tabeli 1. Przy wartości  $dt$  poniżej 0,0003 s nastąpiła stabilizacja wyniku obliczeń.

## 6. Metoda analitycznego obliczania skuteczności geometrycznej dowolnej geometrii

Wykorzystując wzory analityczne do obliczania skuteczności geometrycznej dla pierścienia, można obliczyć w sposób analityczny dowolną geometrię tarczy zacierającej. Idea obliczeń polega na podziale tarczy pełnej na  $n$  współśrodkowych stykających się ze sobą pierścieni w całości wypełniających tarczę, których środki położone są w środku obrotu tarczy. Suma skuteczności geometrycznej wszystkich pierścieni dla danego obrabianego punktu będzie skutecznością

geometryczną tarczy pełnej. W przypadku dowolnej geometrii każdemu z pierścieni można przypisać współczynnik wypełnienia określający, jaka część powierzchni pierścienia pokrywa się z częścią roboczą. Współczynnik 0 odpowiada sytuacji, gdy w obrębie pierścienia tarcza nie ma powierzchni roboczej, zaś 1, gdy na całej powierzchni pierścienia występuje powierzchnia robocza, wartości pośrednie odpowiadają częściowemu wypełnieniu powierzchni pierścienia. Wartości współczynników wypełnienia można obliczyć jako iloraz ilości punktów pokrywających się z powierzchnią roboczą tarczy do wszystkich punktów wygenerowanych dla pierścienia:

$$\begin{aligned}
 S_{1,1} * w_1 + S_{1,2} * w_2 + S_{1,3} * w_3 + \dots + S_{1,n} * w_n &= S_{g1} \\
 S_{2,1} * w_1 + S_{2,2} * w_2 + S_{2,3} * w_3 + \dots + S_{2,n} * w_n &= S_{g2} \\
 S_{3,1} * w_1 + S_{3,2} * w_2 + S_{3,3} * w_3 + \dots + S_{3,n} * w_n &= S_{g3} \\
 S_{4,1} * w_1 + S_{4,2} * w_2 + S_{4,3} * w_3 + \dots + S_{4,n} * w_n &= S_{g4} \\
 &\dots \\
 S_{k,1} * w_1 + S_{k,2} * w_2 + S_{k,3} * w_3 + \dots + S_{k,n} * w_n &= S_{gk}
 \end{aligned} \tag{8}$$

gdzie:  $S_{ij}$  – skuteczność geometryczna  $S_g$  pierścienia  $j$  w punkcie odciętej sensora  $i$ ,  $w_i$  – współczynnik wypełnienia pierścienia  $i$ ,  $S_{gi}$  – skuteczność geometryczna  $S_g$  dla sensora  $i$ .

Powyższy zapis z wzoru (8) można przedstawić w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix}
 S_{1,1} & S_{1,2} & S_{1,3} & \dots & S_{1,n} \\
 S_{2,1} & S_{2,2} & S_{2,3} & \dots & S_{2,n} \\
 S_{3,1} & S_{3,2} & S_{3,3} & \dots & S_{3,n} \\
 S_{4,1} & S_{4,2} & S_{4,3} & \dots & S_{4,n} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 S_{k,1} & S_{k,2} & S_{k,3} & \dots & S_{k,n}
 \end{bmatrix}
 x
 \begin{bmatrix}
 w_1 \\
 w_2 \\
 w_3 \\
 \dots \\
 w_n
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 S_{g1} \\
 S_{g2} \\
 S_{g3} \\
 S_{g4} \\
 \dots \\
 S_{gk}
 \end{bmatrix} \tag{9}$$

## 7. Wnioski

Metoda analityczna obliczania skuteczności geometrycznej  $S_g$  dla koła i pierścienia radykalnie skraca proces obliczeniowy, zamieniając wiele kroków procesu iteracyjnego sprawdzania przynależności punktu do tarczy w obliczenie pojedynczej formuły dla określonego punktu. W testowanych przypadkach dla tarczy pełnej nastąpiło skrócenie czasu obliczeń ponad 8500, a dla pierścienia 6600 razy w porównaniu z metodą symulacyjną. Wykorzystując wzory analityczne, zwiększamy dokładność, eliminując błędy zamiany krzywych na skończoną liczbę odcinków łamanej i błędy numeryczne wynikające ze straty dokładności w przypadku dodawania bardzo małych liczb do dużych, np. w przypadku obliczania sumy wprost. Zamiana skomplikowanej geometrii tarczy na współczynniki wypełnień pierścieni określające proporcję występowania powierzchni roboczej w obrębie pierścienia pozwala na wykonywanie szybkich obliczeń skuteczności geometrycznej  $S_g$  dla dowolnych punktów na powierzchni oddziaływania. Zmniejszenie czasu obliczeń pozwala na zastosowanie metod optymalizacji z ograniczeniami do wyznaczenia optymalnej geometrii w sposób ogólny przy ilości pierścieni pozwalającej uzyskać wymaganą dokładność aproksymacji geometrii tarczy [8].

## Literatura

- [1] Chrząszczewski W., Obróbka mechaniczna i obrabiarki do kamienia, h.g.BRAUNE, Jawor 2004.
- [2] Tyrowicz T., Kamieniarstwo, Obróbka maszynowa, Arkady, Warszawa 1958.
- [3] Rajczyk J., Podstawy naukowe doboru struktury i kinematyki tarczowych narzędzi roboczych maszyn do obróbki powierzchni betonu, Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa 2007.
- [4] Rajczyk J., Urbański M., Methodology of indicating the trowelling operation start time on the concrete mix surface, Zeszyty Naukowe Politechniki Częstochowskiej 2013, seria Budownictwo 19, 140–149.

- [5] Kosiń M., Procesy technologiczne w produkcji elewacyjnych płyt kamiennych, Zeszyty Naukowe Politechniki Częstochowskiej 2015, seria Budownictwo 21, 101–106.
- [6] Kalinowski J., Rajczyk Z., Al-Mashadani M., Efficiency Analysis of the disc working element in reference of treatment technology of concrete surface, Zeszyty Naukowe Politechniki Częstochowskiej 2009, seria Budownictwo 15, 107–118.
- [7] Raltson A., Wstęp do analizy numerycznej, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1993.
- [8] Kincaid D., Cheney W., Analiza numeryczna, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2006.

## Calculating float finishing disk geometric effectiveness with analytic method

### ABSTRACT:

Article presents a way of calculating geometrical effectiveness of  $S_f$  floating or grinding using analytic equations method. This way was compared to simulation method. Applying analytic equations allows decreasing the calculation time comparing to simulation equations for working elements in shapes of wheels or rings. Presented approximation of any geometric working elements with concentric rings allows for obtaining average value along disk movement direction in an exact way with small computational work. High rotation speeds in relation to progressive used in disk floaters give high uniform of treatment in a direction parallel to machine's movement that doesn't deviate significantly from the average. Usage of ring geometric effectiveness matrices which coefficients can be acquired from analytic equations and matrices of ring fill factors allows for getting values of disk geometric effectiveness in direction parallel to direction of the floater for a very small amount of computational work. Using optimization algorithms through modification of values of matrix fill factors can improve disk geometry due to desired geometric effectiveness and uniformity of its distribution.

### KEYWORDS:

geometric effectiveness; floating; grinding; concrete; simulation